

الگوریتم آزادسازی لاگرانژ برای حل مسأله مسیریابی وسیله نقلیه تغذیه‌کننده چندناوگانی

مر ترضی صالحی سربیشن^۱، جواد بهنامیان^{۲*}

۱. دانشجوی دکتری، گروه مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی، دانشگاه بوعلی‌سینا، همدان، ایران

۲. دانشیار، گروه مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی، دانشگاه بوعلی‌سینا، همدان، ایران

خلاصه

دریافت خدمات تحویل سریع، انعطاف‌پذیر، قابل اعتماد و کم هزینه توسط مشتریان یکی از چالش‌های مهم برای توزیع کالا به‌خصوص در مناطق شهری می‌باشد. به‌دنبال آن با افزایش تقاضا و به تبع آن افزایش وسائل نقلیه به‌منظور جابجایی کالاها موجب تراکم و ازدحام در شبکه‌های حمل‌ونقل شهری می‌گردد. از این رو در این مطالعه مسأله مسیریابی وسیله نقلیه تغذیه‌کننده چندناوگانی درحالتی که چندین کامیون و موتورسیکلت با یکدیگر جهت ارضا تقاضا به‌صورت همزمان همکاری می‌کنند، بررسی می‌گردد. مسأله مسیریابی وسیله نقلیه تغذیه‌کننده از ناوگان ناهمگون وسایل نقلیه شامل کامیون و موتورسیکلت تشکیل شده است و امکان عبور موتورسیکلت‌ها در مناطق پررفت‌وآمد و توزیع ترافیک شهری به‌راحتی امکان‌پذیر می‌کند. رویکرد تغذیه‌کننده در این مسأله تعداد دفعات بازگشت به انبار اصلی برای بارگیری را کاهش و به‌دنبال صرفه‌جویی در زمان و هزینه‌های سفرها است. در اینجا در ابتدا یک مدل ریاضی ارائه شده سپس به‌دلیل پیچیدگی بالای مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط و در راستای کاهش زمان حل مدل در ابعاد بزرگ، از الگوریتم آزادسازی لاگرانژ با رویکرد بهینه‌سازی زیر گرادیان استفاده شده است. نتایج نشان داد که با افزایش ابعاد مسأله، زمان اجرای الگوریتم آزادسازی لاگرانژ نسبت به خروجی‌های مدل اصلی کمتر است. همچنین صرفه‌جویی زمانی حاصل از حل مدل با الگوریتم آزادسازی لاگرانژ قابل توجه بوده و در نتیجه الگوریتم آزادسازی لاگرانژ برای حل مدل کارا است.

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:

دریافت ۱۴۰۱/۰۲/۱۳

پذیرش ۱۴۰۱/۰۸/۲۱

(مقاله پژوهشی)

کلمات کلیدی:

مسیریابی وسیله نقلیه

تغذیه‌کننده

چندناوگانی

آزادسازی لاگرانژ

بهینه‌سازی زیرگرادیان

۱. مقدمه

می‌بایست سرویس‌دهی شوند. هدف مسأله مسیریابی وسایل نقلیه در ساده‌ترین و معمول‌ترین حالت حداقل‌سازی هزینه‌های کلی طی مسیر براساس حداکثر زمان کاری و محدودیت‌های ظرفیت وسایل نقلیه است [۱۲]. در این میان باتوجه به ظرفیت محدود، وسیله نقلیه ممکن است در فواصل معین برای بارگیری مجدد به انبار مرکزی بازگردد. در نتیجه وقتی تقاضای کل مشتریان بسیار بیشتر از ظرفیت وسیله نقلیه باشد، تعداد سفرهای برگشتی و همچنین هزینه سفر مربوطه بسیار زیاد خواهد بود. برای کاهش کل هزینه‌های سفر صرف شده برای بارگیری مجدد، دو استراتژی در نظر گرفته شده است: (۱) ایجاد

مسأله مسیریابی وسیله نقلیه (VRP) یکی از شناخته‌شده‌ترین مسائل بهینه‌سازی به حساب می‌آید که هدف آن طراحی مجموعه بهینه‌ی مسیرها برای سرویس‌دهی به مشتریان است به‌گونه‌ای که با محدودیت‌های موجود سازگار باشد. مسأله مسیریابی وسیله نقلیه توسط دانتریگ و رامسر در قالب مسأله‌ای برای مسیریابی کامیون‌های گازوئیل از پایانه سوخت‌رسانی به ایستگاه‌های متقاضی گازوئیل، مطرح شد [۱۱]. این مسأله در حالت عادی شامل یک انبار، ناوگانی از وسایل نقلیه که در انبار استقرار یافته‌اند و مجموعه‌ای از مشتریان است که

* نویسنده مسئول: جواد بهنامیان

تلفن: ۰۸۱-۳۸۲۹۲۵۰۵؛ پست الکترونیکی: Behnamian@Basu.ac.ir

پارکینگ کافی به‌عنوان نقطه تقاطع یا تغذیه‌کننده اتفاق بیفتند؛ بنابراین، انبار مجازی برای بهبود کارایی عملیات تحویل از اهمیت بالایی برخوردار می‌شود. اگر تعداد انبارهای مجازی و مکان آن‌ها ثابت باشد، معمولاً عملیات تحویل کارایی کم‌تری خواهد داشت. در بسیاری از شرایط، انبارهای مجازی بسته به کسب‌وکار و سفارش‌های دریافتی، در هرروز متفاوت هستند؛ بنابراین، معقول است که مکان انبارهای مجازی به‌عنوان متغیر در نظر گرفته شوند. با این حال، وسیله نقلیه کوچک و بزرگ باید تورهای خود را هم‌زمان (همهانگ) انجام دهند تا بتوانند جابجایی را انجام دهند. به‌عبارت دیگر، وسیله نقلیه کوچک و بزرگ باید هم‌زمان در همان مکان باشند؛ بنابراین *FVRP* چندناوگانی را می‌توان به‌عنوان مسیریابی وسیله نقلیه با محدودیت‌های همهانگ‌سازی نامید [۱].

در این مطالعه مسأله مسیریابی وسیله نقلیه تغذیه‌کننده چندناوگانی مورد بررسی قرار گرفته است. در این راستا برای اولین بار الگوریتم آزادسازی لاگرانژ با رویکرد بهینه‌سازی زیر گرادیان برای این مسأله با شرایط ناهمگونی کامیون‌ها و موتورسیکلت‌ها، در نظر گرفتن گره‌های تقاطع به‌عنوان متغیر تصمیم و امکان تقاطع هر کامیون و موتورسیکلت در طی فرآیند تحویل توسعه داده شده است.

ادامه این تحقیق به شرح زیر سازماندهی شده است. در بخش دوم مقالات مرتبط با مسیریابی وسیله نقلیه تغذیه‌کننده و تفاوت این مسأله با برخی از مسأله‌های مسیریابی بررسی می‌شوند. فرمول‌بندی مسأله در بخش سوم آورده می‌شود. بخش چهارم الگوریتم آزادسازی لاگرانژ و الگوریتم پیاده شده در مقاله و توضیحات آن اختصاص یافته است. بخش پنجم نتایج محاسباتی و بحث ارائه می‌گردد. در انتها، بخش ششم نتیجه‌گیری ارائه و مطالعات آتی پیشنهاد می‌گردد.

۲. ادبیات تحقیق

FVRP یک مسأله نسبتاً جدید است اما در هسته آن هنوز هم یک مسأله مسیریابی وسیله نقلیه است. طبق تحقیقات انجام‌شده، مطالعات اندکی در مورد *FVRP* در ادبیات تحقیق یافت شد. توو و همکاران^۴ [۲] مفهوم مسأله مسیریابی وسیله نقلیه تغذیه‌کننده همراه با مشتریان متقاضی و تحویل‌گیرنده کالا با انبار مجازی از پیش تعیین شده^۵ (*LFVRP-PVD*) را برای اولین بار ارائه دادند. با استفاده از دو نوع وسایل نقلیه، جعبه‌های ناهار را به همه مشتریان تحویل می‌دادند. وسایل نقلیه کوچک خالی و نسبتاً خالی برای بارگیری مجدد در انبارهای مجازی از پیش تعیین شده وسایل نقلیه بزرگ را ملاقات می‌کردند. چانگ و همکاران^۶ [۳] متعاقباً یک روش حل دومرحله‌ای ابتکاری برای مسأله *LFVRP-PVD* پیشنهاد دادند. در این تحقیق در مرحله اول، از روش نزدیک‌ترین همسایگی برای ساختن مسیرهای اولیه استفاده شد و در مرحله دوم، راه‌حل اولیه با

انبارهای بیشتر در مجاورت بازار تقاضا، و (۲) اعزام وسیله نقلیه بزرگ‌تر با ظرفیت بیشتر. اولین استراتژی فقط زمانی امکان‌پذیر است که قیمت زمین، هزینه ساخت یا اجاره و هزینه‌های عملیات انبار کم باشند. اجرای استراتژی اول دشوار است، زیرا زمین برای ایجاد انبارهای جدید کمیاب و گران است، به‌خصوص هنگامی که محل انبار موردنظر نزدیک به مناطق شهری بسیار توسعه‌یافته باشد. استراتژی دوم به‌ظاهر مجاز است، اما ممکن است با مشکلاتی روبرو شود، به‌خصوص هنگامی که خیابان‌ها خیلی باریک باشند یا وقتی وسایل نقلیه بزرگ به دلیل ایمنی اجازه ورود نداشته باشند. همچنین محدودیت‌های دسترسی معمولاً در بسیاری از مناطق شهری مشاهده می‌شوند. برای مقابله با مشکلات موجود در این دو استراتژی، رویکرد سوم رویکرد تغذیه‌کننده در *VRP* برای کاهش هزینه کل بارگیری مجدد پیشنهاد می‌شود که مسأله مسیریابی وسیله نقلیه تغذیه‌کننده^۱ (*FVRP*) نامیده می‌شود [۱۳]. در فرآیند توزیع حمل‌ونقل شهری در مسأله کلاسیک *VRP*، درحالتی که تقاضای مشتریان کمی بیش از ظرفیت یک وسیله نقلیه باشد، بایستی از وسیله نقلیه دیگر استفاده نمود که باعث افزایش هزینه‌ها می‌گردد. مسأله *FVRP* چندناوگانی^۲ برخلاف مسأله مسیریابی وسیله نقلیه، از یک انبار فیزیکی، مجموعه‌ای از مشتریان و ناوگانی از وسایل نقلیه ناهمگون شامل حداقل دو کامیون و دو موتورسیکلت نقلیه تشکیل شده است. ناوگان ناهمگن از دو کلاس وسایل نقلیه شامل وسایل نقلیه کوچک و بزرگ استفاده می‌کند که از انبار ارسال می‌شوند. کلاس وسيله نقلیه کوچک می‌تواند به‌عنوان مثال با یک موتورسیکلت نشان داده شود. هزینه یک موتورسیکلت بسیار کمتر از مثال یک کامیون است، آن‌ها به‌راحتی می‌توانند در مناطق پرآزدحام حرکت کنند و به دلیل عدم وجود موتور احتراق، هیچ‌گونه آلودگی ندارند. به‌طور خلاصه، مشخصات کلاس وسيله نقلیه کوچک ظرفیت محدود، برد محدود و هزینه کمتر است. در مقایسه با کلاس وسيله نقلیه کوچک، کلاس وسيله نقلیه بزرگ به‌سختی محدودیت ظرفیت را دارد (به‌عنوان مثال کامیون با تریلر). علاوه بر این، آن‌ها می‌توانند مسافت‌های طولانی‌تری را طی کنند، همچنین هزینه‌های کلی بالاتری دارند. اگرچه امکانات مانور (به‌خصوص در خیابان‌های باریک و در طول ساعت شلوغی) وسایل نقلیه کوچک بزرگ‌ترین مزیت آن‌ها است، اما نقطه‌ضعف اصلی این وسایل که همان محدودیت ظرفیت هست همچنان باقی است. به‌عبارت دیگر، وسیله نقلیه کوچک ممکن است فقط قبل از مراجعه به انبار فیزیکی قادر به بازدید چند مشتری باشد. سفرهای مداوم به انبار فیزیکی منجر به هزینه‌های اضافی سفر و اتلاف وقت می‌شود. برای حل این مشکل، وسیله نقلیه کوچک می‌تواند از وسیله نقلیه بزرگ به‌عنوان یک انبار مجازی^۳ (*VD*) یا انبارهای متحرک (نقش انبارهای متحرک) استفاده کند. انبارهای مجازی می‌توانند در یک پارکینگ یا در محل مشتری با فضای

4. Tu et al

5. The linehaul-feeder vehicle routing problem with prespecified virtual depot

6. Chang et al

1. Feeder vehicle routing problem

2. Multi-fleet FVRP

3. Virtual depot

بارگیری کند. از آنجایی که در مسأله *ELFVRPTW* چند وسیله نقلیه بزرگ و محدودیت ظرفیت وسایل نقلیه مورد توجه قرار گرفت، در مقایسه با نسخه قبلی آن، یعنی *LFVRPTW*، واقع‌بینانه‌تر بود. برای حل این مسأله، الگوریتم حل دومرحله‌ای شامل ایجاد مسیر اولیه و بهبود مسیر پیشنهاد شد. نتایج نشان داد که *ELFVRPTW* نسبت به *LFVRPTW* با توجه به مقادیر میانگین تابع هدف و میانگین تعداد وسایل نقلیه بهتر عمل کرده است. چن^۶ [۷] به بررسی چهار مورد نحوه تغذیه وسایل نقلیه کوچک، خدمات بارگیری مجدد، تعداد نقاط کاندید انبارهای مجازی و محدودیت‌های پنجره زمانی در مسأله مربوط به *LFVRPTW* برای ۱۵ نمونه مختلف پرداخت. در این مطالعه از الگوریتم‌های حل مطالعه [۴] استفاده شد. نتایج نشان داد که اولاً، *LFVRPTW* همیشه نتایج بهتری نسبت به *VRPTW* می‌داد. دوماً، *LFVRPTW* در مقایسه با *VRPTW* با صرفه‌تر بود. سوماً استفاده از نقاط کاندید بیشتر تر انبار مجازی، بازدهی بیشتری داشت. چهارماً، محدودیت‌های پنجره زمانی، از مزایای قابل توجهی برای *LFVRPTW* برخوردار بودند. برنستتر و ریمن^{۱۰} [۸] به نسخه نسبتاً جدیدی از مسأله شناخته شده مسیریابی وسایل نقلیه با عنوان *LFVRP* پرداختند. این مسأله به‌عنوان *VRP* با محدودیت‌های هماهنگ‌سازی توصیف می‌شد که در آن دو نوع مشتری به وسیله دو نوع وسیله نقلیه بازدید می‌شدند. این وسایل نقلیه برخلاف *VRP* معمولی، می‌توانستند برای گسترش سفر خود یک حمل‌ونقل برای انتقال کالا را انجام دهند. برای دستیابی به این هدف، وسایل نقلیه نیاز به همگام‌سازی (هماهنگ‌سازی) داشتند، به این معنی که باید هم‌زمان در یک مکان باشند. در این مطالعه هدف *LFVRP* حداقل رساندن هزینه کل شامل هزینه ثابت وسیله نقلیه، هزینه‌های سوخت وسایل نقلیه و دستمزد رانندگان بود. در این مطالعه دو الگوریتم فرا ابتکاری با رویکرد انشعاب و اتصال با الهام از بینش‌های ساختاری برای به‌دست آوردن جواب‌های نزدیک به بهینه برای مسأله پیشنهاد شد. نتایج نشان داد که کیفیت الگوریتم‌های ابتکاری پیشنهادی در مقایسه با مطالعات قبلی بهتر بود. برنستتر و ریمن [۹] در راستای گسترش مطالعه [۸] دو رویکرد بهبود پیوند و انشعاب برای مسأله *LFVRP* پیشنهاد دادند. این بهبودها شامل کاربرد بهینه‌سازی الگوریتم مورچگان، عملگرهای جستجوی محلی و همچنین حل دقیق برای زیر مسأله بودند. برای برجسته کردن سهم عملکرد این تغییرات، یک آزمایش محاسباتی کامل و گسترده انجام شد. در این مطالعه هر مؤلفه الگوریتم جداگانه و همچنین ترکیب آن‌ها ارزیابی شدند. نتایج این تحقیق نشان داد که الگوریتم نهایی نزدیک به ۹ درصد در هزینه‌های محاسباتی بهبود ایجاد کرده است. در مطالعه‌ی دیگری برنستتر [۱۰]، *LFVRP* را با پنجره‌های زمانی

استفاده از روش تعویض گره بهبود یافت. نتایج محاسباتی با استفاده از داده‌های عددی به‌دست آمده از یک شرکت تحویل اکسپرس بین‌المللی در تایوان انجام و هفت راهکار مختلف برای تعیین انبارهای مجازی منحصربه‌فرد از نظر کل هزینه باهم مقایسه شدند. مشکل رایج در ارتباط با *LFVRP-PVD* عدم انعطاف‌پذیری ناشی از انبارهای مجازی از پیش تعیین شده است. برای برطرف کردن این مشکل چن و همکاران^۱ [۴] مسأله مسیریابی وسیله نقلیه تغذیه‌کننده همراه با مشتریان متقاضی و تحویل‌گیرنده کالا با انبارهای مجازی^۲ (*LFVRP-VD*) را معرفی کردند. در این مسأله حین عملیات تحویل، یک وسیله نقلیه بزرگ از انبار فیزیکی خارج می‌شود و کلیه انبارهای مجازی را سرویس می‌دهد. همچنین در این تحقیق مجموعه وسایل نقلیه کوچک، کالا را به مشتری تحویل می‌دادند و در صورت نیاز، قبل از ادامه کار، یا از انبار یا از وسیله نقلیه بزرگ در یک *VD* بارگیری مجدد می‌کردند. در این تحقیق دو الگوریتم ابتکاری روش تسهیم هزینه^۳ و روش آستانه^۴ برای ساخت جواب‌های اولیه باهدف حداقل کردن هزینه‌های سفر و انتظار برای همه وسایل نقلیه استفاده نمودند. نتایج محاسباتی این تحقیق نشان داد که عملکرد روش تسهیم هزینه نسبت به روش آستانه بهتر است. همچنین با افزایش تعداد انبارهای مجازی مقدار تابع هدف بهتری به‌دست آمد. به‌طور مشابه چن و همکاران [۵] به بررسی مسأله مسیریابی وسیله نقلیه تغذیه‌کننده همراه با مشتریان متقاضی و تحویل‌گیرنده کالا با انبارهای مجازی و پنجره‌های زمانی^۵ (*LFVRP-VDTW*) پرداختند. در این تحقیق وسایل نقلیه کوچک و بزرگ خدمات تحویل را در محدودیت زمانی به مشتریان تحویل می‌دادند. روش ابتکاری دومرحله‌ای شامل جستجو ممنوع^۶ برای حل این مسأله پیشنهاد شد. نتایج این تحقیق نشان داد، مقدار تابع هدف و تعداد وسایل نقلیه کوچکی که در *LFVRP-VDTW* اعزام می‌شدند، نسبت به مسأله مسیریابی وسیله نقلیه سنتی با پنجره زمانی، عملکرد بهتری داشتند. چن و وانگ^۷ [۶] یک مسأله تعمیم‌یافته مسیریابی وسایل نقلیه خط فیدر با پنجره زمانی^۸ (*ELFVRPTW*) ارائه دادند. هدف این مطالعه حداقل کردن هزینه ثابت، هزینه سفر، هزینه نیروی انسانی و هزینه انتظار برای کلیه مسیرهای وسیله نقلیه بود. در *ELFVRPTW*، وسایل نقلیه با توجه به اندازه و ظرفیت به دو نوع (وسایل نقلیه بزرگ و کوچک) تقسیم شدند. در این تحقیق وسایل نقلیه کوچک کالاها را در مدت زمان مشخص شده به مشتریانی که در جاده‌های باریک واقع بودند، تحویل می‌دادند. هنگامی که بار یک وسیله نقلیه کوچک در آن مسیر خالی یا تقریباً خالی می‌شد، این امکان را داشت که کالا را از وسیله نقلیه بزرگ که در یک انبار مجازی ساکن بود یا مستقیماً از انبار فیزیکی مجدداً

6. Tabu search

7. Chen and Wang

8. Extended linehaul-feeder vehicle routing problem with time windows

9. Chen

10. Brandstatter and Reimann

1. Chen et al

2. The linehaul-feeder vehicle routing problem with virtual depots

3. Cost-sharing method

4. Threshold method

5. The linehaul-feeder vehicle routing problem with virtual depots and time windows

مجموعه داده محک و یک الگوریتم ابتکاری چهارمرحله‌ای برای بررسی عملکرد *FVRP* استفاده کردند. نتایج این تحقیق نشان داد که الگوریتم *ACO* پیشنهادی راه‌حل‌های مناسبی را به‌خصوص برای مسائل با سایز بزرگ در یک بازه زمانی معقول و با روشی کارآمد ارائه داد. صالحی سربیزن و بهنامیان [۱] با توسعه مسأله *FVRP* به چندناوگانی و رویکرد جفت کامیون و موتورسیکلت در طی فرآیند تحویل یکسان باقی می‌مانند، پرداختند. این نویسندگان الگوریتم ترکیبی *PSO-SA* را با الگوریتم‌های *ACO*، *PSO* و *VNS* در نمونه‌های با ابعاد کوچک، متوسط و بزرگ مقایسه کردند. همچنین اخیراً صالحی سربیزن و بهنامیان [۱۲] الگوریتم *MOPSO-VNS* را برای مسأله مسیریابی وسیله نقلیه تغذیه‌کننده همکارانه در زمان واقعی^۲ (*RTCFVRP*) با پنجره‌های زمانی انعطاف‌پذیر توسعه دادند. نتایج نشان داد که الگوریتم پیشنهادی در مقایسه با الگوریتم‌های *MOPSO*، *NSGA-II* و *MOEA/D* در حالت‌های پویا و ایستا بهتر عمل کرده است. جدول (۱) طبقه‌بندی مقالات بررسی شده در زمینه *FVRP* را نشان می‌دهد. باتوجه به مطالعات انجام شده در ادبیات تحقیق، همان‌طور که مشاهده می‌گردد برای مسأله *FVRP* چندناوگانی برای اولین بار الگوریتم آزادسازی لاگراژ با رویکرد بهینه‌سازی زیر گرادیان توسعه داده شده است.

در نظر گرفت. در این مطالعه چهار رویکرد استراتژی بهبود فرا ابتکاری، ابتکاری برمبنای مدل ریاضی، تولید چندین راه‌حل و جستجوی محلی توسعه داده شد. نتایج این تحقیق نشان داد در استراتژی فراابتکاری وسیله نقلیه کوچک تورهایی برای همه مشتریان نوع دوم ایجاد می‌کردند و استراتژی ابتکاری برمبنای مدل ریاضی راه‌حل‌های بهینه برای هر تور را یافتند. استراتژی راه‌حل چندگانه چندین راه‌حل با استفاده از تکنیک‌های مختلف و بارگذاری مجدد موقعیت‌ها ایجاد کردند. در استراتژی جستجوی محلی از مکانیزم تخریب و ترمیم برای بهبود بیش‌تر راه‌حل استفاده شد. همچنین در این تحقیق نتایج تجزیه‌وتحلیل محاسباتی در مورد تأثیر ویژگی‌های مختلف پنجره زمانی و مزیت *LFVRPTW* نسبت به انواع دیگر مسأله مسیریابی وسیله نقلیه با پنجره‌های زمانی ارائه شد. هیوانگ و همکاران^۱ [۱۱] به بررسی *FVRP*، به‌عنوان نوع جدیدی از مسأله مسیریابی وسیله نقلیه پرداختند، که در آن هر مشتری به‌وسیله یک وسیله نقلیه بزرگ (کامیون) یا یک وسیله نقلیه کوچک (موتورسیکلت) ملاقات می‌شد. در این نوع تحویل خاص، کامیون و موتورسیکلت باید از انبار خارج، به مشتریان مراجعه کنند و در نهایت به انبار بازگردند. در این مسأله طی فرآیند تحویل، موتورسیکلت برای بارگیری مجدد به مکان کامیون حرکت می‌کنند. در این مطالعه از الگوریتم بهینه‌سازی کلونی مورچگان^۲ (*ACO*) برای حل مسأله باهدف به حداقل رساندن کل هزینه (ثابت و هزینه سفر) استفاده کردند. همچنین آن‌ها از سه

جدول (۱). دسته‌بندی مقالات ادبیات تحقیق

منبع	سال	نوع مسأله	هدف	الگوریتم حل
توو و همکاران [۲]	۲۰۰۱	LFVRP-PVD	حداقل کردن هزینه مسیریابی	بدون داده عددی
چانگ و همکاران [۳]	۲۰۰۱	LFVRP	حداقل کردن هزینه مسیریابی	نزدیک‌ترین همسایگی
چن و همکاران [۴]	۲۰۱۱	LFVRP-VD	حداقل کردن هزینه‌های سفر و انتظار	تسهیم هزینه و روش آستانه
چن و همکاران [۵]	۲۰۱۱	LFVRP-VDTW	حداقل کردن هزینه مسیریابی	جستجو ممنوعه
چن و وانگ [۶]	۲۰۱۲	ELFVRPTW	حداقل کردن هزینه ثابت، هزینه سفر، هزینه نیروی انسانی و انتظار	حل دومرحله‌ای شامل ایجاد مسیر اولیه و بهبود مسیر
چن [۷]	۲۰۱۵	LFVRPTW	حداقل کردن هزینه مسیریابی	تسهیم هزینه و روش آستانه
برندستتر و ریمن [۸]	۲۰۱۸	LFVRP	حداقل کردن هزینه‌های ثابت و متغیر سوخت و دستمزد رانندگان	رویکرد اتصال و انشعاب
برندستتر و ریمن [۹]	۲۰۱۸	LFVRP	حداقل کردن هزینه‌های سفر	الگوریتم مورچگان، جستجوی محلی
برندستتر [۱۰]	۲۰۱۹	LFVRPTW	حداقل کردن هزینه‌های ثابت و متغیر سوخت و دستمزد رانندگان	ابتکاری بر مبنای مدل ریاضی و جستجوی محلی
هیوانگ و همکاران [۱۱]	۲۰۱۹	FVRP	حداقل کردن هزینه ثابت و هزینه سفر	کلونی مورچگان
صالحی سربیزن و بهنامیان [۱]	۲۰۲۲	FVRP چندناوگانی	حداقل کردن هزینه‌های مسیریابی	PSO-SA, PSO
صالحی سربیزن و بهنامیان [۱۲]	۲۰۲۲	FVRP همکارانه در زمان واقعی	حداقل کردن هزینه‌های مسیریابی حداکثر کردن رضایت مشتری	MOPSO, MOPSO-VNS
مطالعه حاضر	-	FVRP چندناوگانی	حداقل کردن هزینه‌های مسیریابی	الگوریتم آزادسازی لاگراژ

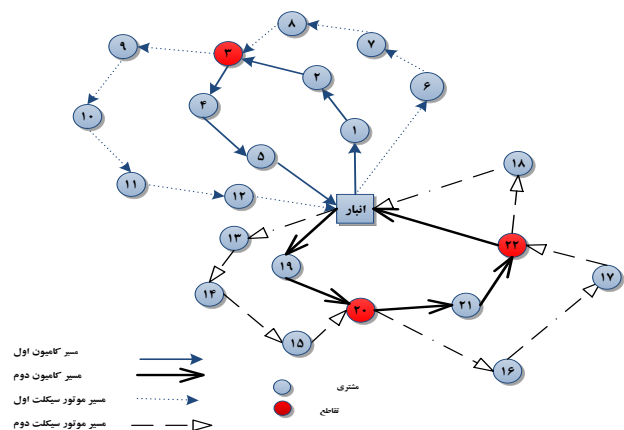
3. Real-time collaborative feeder vehicle routing problem with flexible time windows

1. Huang et al
2. Ant colony optimization

۳. توصیف مسأله مسیریابی وسیله نقلیه تغذیه‌کننده

چندناوگانی

یک گراف مانند $G=(N,A)$ را در نظر بگیرید. N نشان‌دهنده گره‌ها و A نشان‌دهنده کمان‌ها می‌باشند. مجموعه N شامل یک انبار (دپو) و گره‌های باقیمانده مجموعه مشتریان می‌باشند. ابتدا و انتهای مسیرهای وسایل نقلیه مختلف در مسأله $FVRP$ چندناوگانی از انبار انجام می‌شوند. همه مشتریان باید به وسیله حداقل یک وسیله نقلیه (کامیون یا موتورسیکلت) بازدید شوند. شکل (۱) مثالی از $FVRP$ چندناوگانی با دو کامیون و دو موتورسیکلت را نشان می‌دهد. برای مثال موتورسیکلت اول بعد از بازدید گره‌های ۶، ۷ و ۸ به جای برگشت به انبار کامیون اول را در نقطه تقاطع ۳ بازدید کرده و بعد از بارگیری به گره‌های ۹، ۱۰، ۱۱ و ۱۲ خدمت‌رسانی کرده و مجدداً به انبار برمی‌گردد. کامیون اول هم بعد از خدمت‌رسانی به مشتریان ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ به انبار برمی‌گردد. موتورسیکلت دوم بعد از خروج از انبار تقاضای مشتریان ۱۳، ۱۴ و ۱۵ را برآورده، سپس با کامیون دوم در محل مشتری ۲۰ بارگیری مجدد انجام داده و بعد از بارگیری به مشتریان ۱۶ و ۱۷ سرویس‌دهی کرده و سپس در محل مشتری ۲۲ مجدداً کامیون دوم را ملاقات و به اندازه تقاضای مشتری ۱۸ بارگیری و بعد از برآورده کردن تقاضای مشتری ۱۸ به انبار برمی‌گردد. کامیون دوم هم بعد از برآورده کردن تقاضاهای مشتریان ۱۹، ۲۰، ۲۱ و ۲۲ به انبار برمی‌گردد.



شکل (۱). تصویرسازی مسأله مسیریابی وسیله نقلیه تغذیه‌کننده چندناوگانی

۳-۱. مفروضات مدل

- حرکت کامیون‌ها و موتورسیکلت‌ها از انبار شروع و در پایان به انبار برمی‌گردند.
- تمام تقاضای مشتریان برآورده می‌شود. هر مشتری باید یک‌بار با یک نوع وسیله نقلیه (کامیون یا موتورسیکلت) ملاقات شود، اما ممکن است بیش از یک‌بار با نوع دیگری از وسیله نقلیه، در نقاط تقاطع بازدید شود.
- مکان هر گره تقاطع متغیر است.

- کامیون‌ها و موتورسیکلت‌ها دارای محدودیت ظرفیت می‌باشند.
- همه مشتریانی که تقاضا دارند، بایستی در یک روز سرویس‌دهی شوند.
- تنها دو هزینه (هزینه ثابت‌مسیر و متغیر) در این مطالعه در نظر گرفته می‌شود.
- در طی فرآیند تحویل در نقاط تقاطع، امکان تقاطع هر موتورسیکلت با هر کامیون وجود دارد.
- بارگیری مجدد موتورسیکلت‌ها در نقاط تقاطع به اندازه تقاضای گره‌ها انجام می‌گیرد.
- کل زمان هر وسیله نقلیه با جمع کردن زمان سفر، سرویس‌دهی و بارگیری مجدد به دست می‌آید.
- کامیون‌ها قبل یا هم‌زمان با موتورسیکلت‌ها به نقاط تقاطع می‌رسند و بعد از تحویل بار به موتورسیکلت‌ها و ترک گره تقاطع به وسیله موتورسیکلت، گره را ترک می‌کنند.
- باتوجه به کوچک بودن موتورسیکلت‌ها زمان بارگیری مجدد در نقاط تقاطع با کامیون‌ها یکسان در نظر گرفته می‌شود.

۳-۲. شاخص‌ها، مجموعه‌ها، پارامترها و متغیرهای تصمیم

شاخص‌ها

(i, j, l)

شاخص گره‌ها

c

شاخص کامیون

m

شاخص موتورسیکلت

مجموعه‌ها

N

مجموعه گره‌ها (با گره انبار)

I

مجموعه مشتریان

$K_1 = \{1, 2, \dots, k_1\}$

مجموعه کامیون‌ها

$K_2 = \{1, 2, \dots, k_2\}$

مجموعه موتورسیکلت‌ها

پارامترها

$Q_{k_1}^c$

ظرفیت کامیون k_1

$Q_{k_2}^m$

ظرفیت موتورسیکلت k_2

$f_{k_1}^c$

هزینه ثابت کامیون k_1

$f_{k_2}^m$

هزینه ثابت موتورسیکلت k_2

متغیرهای تصمیم

x_{ijk_1}

اگر کامیون k_1 از گره i به گره j سفر کند برابر با یک و در غیر این صورت صفر است.

y_{ijk_2}

اگر موتورسیکلت k_2 از گره i به گره j سفر کند برابر با یک و در غیر این صورت صفر است.

$w_{ik_1k_2}$

اگر گره i به عنوان گره تقاطع برای بارگیری موتورسیکلت k_2 و کامیون k_1 باشد برابر با یک و در غیر این صورت صفر است.

f_{ik_2}

موجودی موتورسیکلت k_2 قبل از بازدید گره i

g_{ik_1}

موجودی کامیون k_1 قبل از بازدید گره i

a_{ik_1}

زمان تجمعی رسیدن کامیون k_1 به گره i

$$\forall k_2 \in K_2, i \in N, j \in I: i \neq j$$

$$f_{jk_2} \leq f_{ik_2} - \left(y_{ijk_2} - \sum_{k_1 \in K_1} w_{ik_1k_2} \right) q_i$$

$$+ Q_{k_2}^m \left(1 - y_{ijk_2} \right) \quad (15)$$

$$+ \sum_{k_1 \in K_1} (w_{ik_1k_2} + w_{jk_1k_2})$$

$$\forall k_2 \in K_2, i \in N, j \in I: i \neq j$$

$$f_{jk_2} \geq q_j y_{ijk_2} - Q_{k_2}^m \sum_{k_1 \in K_1} w_{jk_1k_2} \quad (16)$$

$$\forall k_2 \in K_2, i \in N, j \in I: i \neq j$$

$$f_{jk_2} \leq Q_{k_2}^m \left(1 - \sum_{k_1 \in K_1} w_{jk_1k_2} \right) \quad (17)$$

$$\forall k_2 \in K_2, j \in I$$

$$f_{ik_2} \leq q_i y_{iok_2} + Q_{k_2}^m (1 - y_{iok_2}) \quad (18)$$

$$\sum_{i \in N} \sum_{j \in N: i \neq j} \sum_{k_1 \in K_1} q_j x_{ijk_1}$$

$$+ \sum_{i \in N} \sum_{j \in N: i \neq j} \sum_{k_2 \in K_2} q_j y_{ijk_2}$$

$$- \sum_{j \in N} \sum_{k_1 \in K_1} \sum_{k_2 \in K_2} q_j w_{jk_1k_2}$$

$$= \sum_{j \in N} q_j \quad (19)$$

$$\sum_{k_2 \in K_2} f_{ok_2} + \sum_{k_1 \in K_1} g_{ok_1} = \sum_{j \in N} q_j \quad (20)$$

$$g_{jk_1} \geq g_{ik_1} - x_{ijk_1} q_i - \sum_{l \in N} \sum_{k_2 \in K_2} wyf_{ilk_1k_2}$$

$$- M(1 - x_{ijk_1}) \quad (21)$$

$$\forall k_1 \in K_1, i \in N, j \in I: i \neq j$$

$$g_{jk_1} \leq g_{ik_1} - x_{ijk_1} q_i - \sum_{l \in N} \sum_{k_2 \in K_2} wyf_{ilk_1k_2}$$

$$+ M(1 - x_{ijk_1}) \quad (22)$$

$$\forall k_1 \in K_1, i \in N, j \in I: i \neq j$$

$$g_{ik_1} \leq x_{iok_1} q_i + M(1 - x_{iok_1}) \quad (23)$$

$$\left(\sum_{i \in N} \sum_{k_1 \in K_1} \sum_{k_2 \in K_2} (x_{ijk_1} + y_{ijk_2}) \right) * M \geq q_j$$

$$\forall j \in I, i \neq j \quad (24)$$

$$a_{ik_1} \leq T \quad \forall k_1 \in K_1, i \in N \quad (25)$$

$$a_{jk_1} \geq a_{ik_1} + t_{ij}^c + s_i^c - 2T(1 - x_{ijk_1})$$

$$\forall k_1 \in K_1, i \in N, j \in I: i \neq j \quad (26)$$

$$b_{ik_2} \leq T \quad \forall k_2 \in K_2, i \in N \quad (27)$$

$$b_{jk_2} \geq b_{ik_2} + t_{ij}^m + s_i^m + w_{ik_1k_2}(cc - s_i^m)$$

$$- 2T(1 - y_{ijk_2}) \quad (28)$$

$$\forall k_1 \in K_1, k_2 \in K_2, i \in I, j \in I: i \neq j$$

زمان تجمعی رسیدن موتورسیکلت k_2 به گره i مقدار باری که در حرکت از گره i (گره تقاطع) به گره j موتورسیکلت k_2 از کامیون k_1 بارگیری می‌کند.

$$wyf_{ijk_1k_2} = f_{jk_2} * w_{ik_1k_2} * y_{ijk_2}$$

۳-۳. مدل ریاضی مسأله مسیریابی وسیله نقلیه چندناوگانی

مدل بهینه‌سازی FVRP چندناوگانی توسعه داده شده مطابق با تحقیق [۱]، به شرح زیر است:

$$\min \sum_{i \in N} \sum_{j \in N: i \neq j} c_{ij}^c \sum_{k_1 \in K_1} x_{ijk_1}$$

$$+ \sum_{i \in N} \sum_{j \in N: i \neq j} c_{ij}^m \sum_{k_2 \in K_2} y_{ijk_2} \quad (1)$$

$$+ \sum_{j \in I} \sum_{k_1 \in K_1} f_{k_1}^c x_{ojk_1}$$

$$+ \sum_{j \in I} \sum_{k_2 \in K_2} f_{k_2}^m y_{ojk_2}$$

$$\sum_{j \in I: j \neq i} x_{ijk_1} \leq 1 \quad \forall k_1 \in K_1, i \in N \quad (2)$$

$$\sum_{j \in I} x_{ojk_1} \leq 1 \quad \forall k_1 \in K_1 \quad (3)$$

$$\sum_{i \in N: i \neq l} x_{ilk_1} = \sum_{j \in N: l \neq j} x_{ljk_1} \quad \forall k_1 \in K_1, l \in N \quad (4)$$

$$\sum_{j \in I: j \neq i} y_{ijk_2} \leq 1 \quad \forall k_2 \in K_2, i \in N \quad (5)$$

$$\sum_{j \in I} y_{ojk_2} \leq 1 \quad \forall k_2 \in K_2 \quad (6)$$

$$\sum_{i \in N: i \neq l} y_{ilk_2} = \sum_{j \in N: l \neq j} y_{ljk_2} \quad \forall k_2 \in K_2, l \in N \quad (7)$$

$$\sum_{i \in N: j \neq i} x_{ijk_1} \geq \sum_{k_2 \in K_2} w_{jk_1k_2} \quad \forall k_1 \in K_1, j \in I \quad (8)$$

$$\sum_{i \in N: j \neq i} y_{ijk_2} \geq \sum_{k_1 \in K_1} w_{jk_1k_2} \quad \forall k_2 \in K_2, j \in I \quad (9)$$

$$\sum_{i \in N: j \neq i} (x_{ijk_1} + y_{ijk_2}) \leq 1 + w_{jk_1k_2} \quad (10)$$

$$\forall k_1 \in K_1, k_2 \in K_2, j \in I$$

$$g_{ik_1} \leq Q_{k_1}^c \quad \forall k_1 \in K_1, i \in N \quad (11)$$

$$g_{ok_1} \geq \sum_{i \in N} \sum_{j \in N: i \neq j} q_j x_{ijk_1}$$

$$+ \sum_{i, j \in N} \sum_{k_2 \in K_2} wyf_{ijk_1k_2} \quad (12)$$

$$\forall k_1 \in K_1$$

$$f_{ik_2} \leq Q_{k_2}^m \quad \forall k_2 \in K_2, i \in N \quad (13)$$

$$f_{jk_2} \geq f_{ik_2} - \left(y_{ijk_2} - \sum_{k_1 \in K_1} w_{ik_1k_2} \right) q_i$$

$$- Q_{k_2}^m \left(1 - y_{ijk_2} \right) \quad (14)$$

$$+ \sum_{k_1 \in K_1} (w_{ik_1k_2} + w_{jk_1k_2})$$

ظرفیتشان باشد. محدودیت‌های (۱۴) و (۱۵) برای مشخص کردن مقدار موجودی موتورسیکلت‌ها در هر گره به شرطی که گره i تقاطع نباشد را نشان می‌دهد. زیرا اگر گره i تقاطع باشد تقاضای این گره از کامیون‌ها تأمین می‌گردد. محدودیت (۱۶) نشان می‌دهد اگر گره j تقاطع نباشد بایستی ظرفیتش از تقاضای گره بیشتر باشد. محدودیت (۱۷) نشان می‌دهد اگر گره j تقاطع موتورسیکلت k_2 با یکی از کامیون‌ها باشد، موجودی گره باید صفر باشد. به عبارت دیگر اگر گره j برای موتورسیکلت k_2 تقاطع نباشد، در نتیجه موجودی موتورسیکلت قبل از گره j باید از ظرفیت موتور کمتر باشد. محدودیت (۱۸) نشان می‌دهد که اگر انبار گره نهایی باشد، موجودی موتورسیکلت در گره i قبل از رسیدن به انبار باید کوچکتر مساوی تقاضای گره i باشد. تا باری به انبار برگشت داده نشود. محدودیت (۱۹) نشان می‌دهد که کامیون‌ها و موتورسیکلت‌ها بایستی تمام تقاضای مشتریان را برآورده کنند. در واقع این محدودیت نشان می‌دهد از آنجاکه هم موتورسیکلت‌ها و هم کامیون‌ها از نقاط تقاطع عبور می‌کنند بایستی مقدار تقاضای تقاطع‌ها را از مقدار تقاضای گره‌هایی که کامیون‌ها و موتورسیکلت‌ها از آن‌ها عبور کردند را کم کرد (زیرا تقاضای گره‌های تقاطع دو بار حساب می‌شود). محدودیت (۲۰) نشان می‌دهد جمع موجودی کامیون‌ها و موتورسیکلت‌ها در انبار بایستی به اندازه تقاضای گره‌ها باشد. محدودیت‌های (۲۱) و (۲۲) برای مشخص کردن مقدار موجودی کامیون‌ها در هر گره به شرطی که گره i تقاطع باشد را نشان می‌دهند. محدودیت (۲۳) نشان می‌دهد که اگر گره j انبار باشد موجودی هر کامیون در گره i قبل از رسیدن به انبار باید کوچکتر مساوی تقاضای گره i باشد. تا باری به انبار برگشت داده نشود. محدودیت (۲۴) نشان می‌دهد که گره‌هایی که تقاضا دارند یا به وسیله خودرو یا به وسیله موتورسیکلت بازدید می‌شوند. محدودیت (۲۵) نشان می‌دهد بازدید تمام گره‌ها به وسیله کامیون قبل از زمان شیفت انجام شود. به عبارت دیگر زمان رسیدن کامیون k_1 به گره i قبل از زمان شیفت انجام شود. محدودیت (۲۶) نشان می‌دهد که زمان رسیدن کامیون به گره j برابر است با زمان رسیدن آن به گره i به اضافه زمان خدمت‌رسانی در گره i و زمان حرکت بین گره i و j . محدودیت (۲۷) نشان می‌دهد بازدید تمام گره‌ها به وسیله موتورسیکلت بایستی قبل از زمان شیفت انجام شود. به عبارت دیگر زمان رسیدن موتورسیکلت k_2 به گره i قبل از زمان شیفت انجام شود. محدودیت (۲۸) نشان می‌دهد که زمان رسیدن موتورسیکلت به گره j برابر است با زمان رسیدن آن به گره i به اضافه زمان خدمت‌رسانی در گره i و زمان حرکت بین گره i و j . در صورتی که گره i تقاطع باشد به جای زمان خدمت‌رسانی زمان بارگذاری موتورسیکلت به وسیله کامیون جایگزین می‌شود. محدودیت (۲۹) نشان می‌دهد اگر گره j تقاطع باشد، زمان رسیدن کامیون بایستی قبل از موتورسیکلت یا هم‌زمان باشد. در محدودیت (۳۰) در صورتی که گره i تقاطع باشد، این محدودیت نشان می‌دهد که کامیون بعد از رسیدن موتورسیکلت و بعد از تحویل بار گره i را ترک می‌کند. محدودیت‌های (۳۱) تا (۳۵) برای خطی‌سازی متغیر

$$b_{jk_2} \geq a_{jk_1} - 2T(1 - w_{jk_1k_2}) \quad \forall k_1 \in K_1, k_2 \in K_2, j \in I \quad (29)$$

$$a_{jk_1} \geq b_{ik_2} + t_{ij}^c + s_i^c - 2T(1 - x_{ijk_1}) - 2T(1 - w_{ik_1k_2}) \quad \forall k_1 \in K_1, k_2 \in K_2, i \in N, j \in I: i \neq j \quad (30)$$

$$wyf_{ijk_1k_2} \geq f_{jk_2} - Q_{k_1}^c(1 - w_{ik_1k_2}) - Q_{k_1}^c(1 - y_{ijk_2}) \quad \forall k_1 \in K_1, k_2 \in K_2, i \in N, j \in I: i \neq j \quad (31)$$

$$wyf_{ijk_1k_2} \leq f_{jk_2} + Q_{k_1}^c(1 - w_{ik_1k_2}) + Q_{k_1}^c(1 - y_{ijk_2}) \quad \forall k_1 \in K_1, k_2 \in K_2, i \in N, j \in I: i \neq j \quad (32)$$

$$wyf_{ijk_1k_2} \leq Q_{k_2}^m(w_{ik_1k_2}) \quad \forall k_1 \in K_1, k_2 \in K_2, i \in N, j \in I: i \neq j \quad (33)$$

$$wyf_{ijk_1k_2} \leq Q_{k_2}^m(y_{ijk_2}) \quad \forall k_1 \in K_1, k_2 \in K_2, i \in N, j \in I: i \neq j \quad (34)$$

$$wyf_{ijk_1k_2} \geq 0 \quad \forall k_1 \in K_1, k_2 \in K_2, i \in N, j \in I: i \neq j \quad (35)$$

$$x_{ijk_1}, y_{ijk_2}, w_{ik_1k_2} \in \{0,1\} \quad \forall k_1 \in K_1, k_2 \in K_2, i, j \in N: i \neq j \quad (36)$$

$$f_{ik_2}, g_{ik_1}, a_{ik_1}, b_{ik_2} \geq 0 \quad \forall k_1 \in K_1, k_2 \in K_2, i \in N \quad (37)$$

تابع هدف (۱) شامل حداقل کردن هزینه‌های متغیر و ثابت کامیون‌ها و موتورسیکلت‌ها است. قسمت اول هزینه‌های متغیر کامیون‌ها، قسمت دوم هزینه‌های متغیر موتورسیکلت‌ها و قسمت سوم و چهارم به ترتیب هزینه‌ی ثابت کامیون‌ها و موتورسیکلت‌ها را شامل می‌شود. محدودیت‌های (۲) تا (۴) جریان بین گره‌ها و کامیون‌ها را نشان می‌دهند. محدودیت (۲) نشان می‌دهد که هر گره‌ای به گره‌ی دیگر هر کامیون حداکثر یک حرکت می‌تواند داشته باشد. به عبارت دیگر اگر کامیون k_1 در گره i باشد حرکتش به سمت گره j ، تنها به یکی از آن‌ها امکان‌پذیر است. محدودیت (۳) نشان می‌دهد که حرکت از انبار برای کامیون k_1 به سمت گره j تنها به یکی از آن‌ها امکان‌پذیر است. محدودیت (۴) پیوستگی حرکت بین گره‌ها را نشان می‌دهد. محدودیت‌های (۵) تا (۷) جریان بین گره‌ها و موتورسیکلت‌ها را نشان می‌دهند. محدودیت (۸) نشان می‌دهد که وقتی گره j تقاطع کامیون k_1 با یکی از موتورسیکلت‌ها باشد، کامیون k_1 بایستی از این گره عبور کند. محدودیت (۹) نشان می‌دهد که اگر گره j تقاطع موتورسیکلت k_2 با یکی از کامیون‌ها باشد، موتورسیکلت k_2 بایستی از این گره عبور کند. محدودیت (۱۰) نشان می‌دهد اگر گره j تقاطع کامیون k_1 و موتورسیکلت k_2 باشد، هم کامیون و هم موتورسیکلت باید از این گره عبور کنند. به عبارت دیگر اگر کامیون و موتورسیکلت هم‌زمان از گره i به j بروند، گره j حتماً گره تقاطع است. محدودیت (۱۱) نشان می‌دهد که مقدار بار جابجا شده به وسیله کامیون‌ها در تمام گره‌ها بایستی کمتر یا مساوی ظرفیتشان باشد. محدودیت (۱۲) نشان می‌دهد که مقدار باری که کامیون k_1 از انبار بارگیری می‌کند بایستی از تقاضای گره‌هایی که خدمت‌رسانی می‌کنند و مقدار باری که به موتورسیکلت‌ها می‌دهد بزرگتر باشد. محدودیت (۱۳) نشان می‌دهد که موجودی موتورسیکلت‌ها در همه‌ی گره‌ها باید کوچکتر مساوی

تسهیل می‌بخشد [۱۳]. عملکرد خوب الگوریتم آزادسازی لاگرانژ باعث شده است که بسیاری از محققان در زمینه‌های مختلف برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط از آن استفاده کنند [۱۴]. برای مثال مسأله طراحی شبکه هاب^۳ [۱۵]، مسأله مسیریابی تولید چندمحصولی سبز^۴ [۱۶]، مسأله موجودی مکان‌یابی چندسطحی^۵ [۱۷]، مسیریابی وسیله نقلیه [۱۸] می‌توان نام برد. از آنجایی که الگوریتم آزادسازی لاگرانژ در حل مسائل پیچیده زنجیره‌تأمین [۱۹، ۲۰]، زمان‌بندی جریان کارگاهی منعطف در شبکه‌های چند کارخانه‌ای ناهمسان [۲۱] و مسیریابی [۱۶، ۲۲] موفق بوده است، از این الگوریتم در این مطالعه استفاده شده است. همچنین باتوجه به اینکه مدل ارائه شده در مسأله *FVRP* چندناوگانی هم دارای محدودیت پیچیده‌کننده، هم متغیر پیچیده‌کننده و باتوجه به اینکه بین متغیرها و محدودیت‌ها از نظر تعداد تعادل و توازن وجود دارد، از الگوریتم آزادسازی لاگرانژ برای رسیدن به جواب بهینه بهره گرفته شده است. روش آزادسازی لاگرانژ یکی از روش‌های قدرتمند برای حل مسائل عدد صحیح و یا عدد صحیح آمیخته است. مفهوم اصلی در روش آزادسازی لاگرانژ، شناسایی و آزادسازی مجموعه محدودیت‌هایی است که پیچیدگی محاسباتی مدل را افزایش داده‌اند. بدین منظور، این محدودیت‌ها با افزودن مقداری جریمه براساس میزان تخطی از هر محدودیت، به تابع هدف، اضافه می‌شوند. بنابراین رویکرد حل به سمت کاهش این تخطی پیش خواهد رفت. محدودیت‌های آزاد شده یک حد پایین فراهم می‌کنند. در روش آزادسازی لاگرانژ، حد پایین و بالا از طریق به‌روزرسانی ضرایب لاگرانژ، بهبود می‌یابند [۲۳].

۴-۱. پیاده‌سازی الگوریتم آزادسازی لاگرانژ

در مدل ریاضی *FVRP* چندناوگانی با آزادسازی محدودیت‌های مربوط به موجودی کامیون (رابطه (۱۲))، موتورسیکلت (رابطه‌های (۱۷)) و (۱۸)) به ترتیب با ضرایب مثبت لاگرانژ u_{k_1} ، u_{jk_2} و u_{ik_2} به رابطه‌های (۳۸)، (۳۹) و (۴۰) تبدیل و تابع هدف رابطه (۱) به شکل رابطه (۴۱) بازنویسی می‌گردند. دیگر محدودیت‌ها بدون تغییر باقی می‌مانند.

$$\sum_{k_1 \in K_1} u_{k_1} \cdot \left(\sum_{i \in N} \sum_{j \in N: i \neq j} q_j x_{ijk_1} + \sum_{i, j \in N} \sum_{k_2 \in K_2} wyf_{ijk_1k_2} - g_{ok_1} \right) \quad (38)$$

$$\sum_{j \in I} \sum_{k_2 \in K_2} u_{jk_2} \cdot \left(f_{jk_2} - Q_{k_2}^m \left(1 - \sum_{k_1 \in K_1} w_{jk_1k_2} \right) \right) \quad (39)$$

$$\sum_{i \in N} \sum_{k_2 \in K_2} u_{ik_2} \cdot \left(f_{ik_2} - q_i y_{io_{k_2}} - Q_{k_2}^m \left(1 - y_{io_{k_2}} \right) \right) \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \min & \sum_{i \in N} \sum_{j \in N: i \neq j} c_{ij}^c \sum_{k_1 \in K_1} x_{ijk_1} + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N: i \neq j} c_{ij}^m \sum_{k_2 \in K_2} y_{ijk_2} + \sum_{j \in I} \sum_{k_1 \in K_1} f_{k_1}^c x_{ojk_1} + \sum_{j \in I} \sum_{k_2 \in K_2} f_{k_2}^m y_{ojk_2} \\ & + \sum_{k_1 \in K_1} u_{k_1} \cdot \left(\sum_{i \in N} \sum_{j \in N: i \neq j} q_j x_{ijk_1} + \sum_{i, j \in N} \sum_{k_2 \in K_2} wyf_{ijk_1k_2} - g_{ok_1} \right) \\ & + \sum_{j \in I} \sum_{k_2 \in K_2} u_{jk_2} \cdot \left(f_{jk_2} - Q_{k_2}^m \left(1 - \sum_{k_1 \in K_1} w_{jk_1k_2} \right) \right) + \sum_{i \in N} \sum_{k_2 \in K_2} u_{ik_2} \cdot \left(f_{ik_2} - q_i y_{io_{k_2}} - Q_{k_2}^m \left(1 - y_{io_{k_2}} \right) \right) \end{aligned} \quad (41)$$

$wyf_{ijk_1k_2}$ استفاده شده‌اند. محدودیت‌های (۳۶) و (۳۷) محدودی متغیرهای تصمیم را نشان می‌دهند. پیچیدگی محاسباتی مدل *FVRP* چندناوگانی برحسب متغیرها و محدودیت‌ها در جدول (۲) آمده است. در این جدول N ، k_1 و k_2 به ترتیب تعداد مشتریان، تعداد کامیون‌ها و موتورسیکلت‌ها هستند.

جدول (۲). اندازه پیچیدگی مدل مسأله مسیریابی وسیله نقلیه

عامل	مقدار
متغیرهای صفر و یک	$(K_1 + K_2)N^2 + (K_1K_2)N(K_1 + K_2)N^2 + (K_1K_2)N$
متغیرهای پیوسته	$2(K_2 + K_1)N + K_1K_2(N^2 - N)$
محدودیت‌ها	$(K_1 + K_2)(3N^2 + 3N) + 6K_1K_2(N^2 - N) + N - 1(K_1 + K_2)(3N^2 + 3N) + 6K_1K_2(N^2 - N) + N - 1(K_1 + K_2)(3N^2 + 3N) + 6K_1K_2(N^2 - N) + N - 1$

۴. الگوریتم آزادسازی لاگرانژ

باتوجه به شرایط مسأله، محدودیت‌ها و متغیرهای پیچیده‌کننده می‌توان از بین روش‌های دقیق روش موردنظر برای حل مسأله را پیدا کرد. از بین روش‌های دقیقی که کاربرد زیادی داشتند، روش تجزیه دانتزیگ-ولف^۱ با مسائلی با محدودیت پیچیده‌کننده سروکار دارد. روش تجزیه بندرز^۲ روی مسائلی به کار گرفته می‌شود که دارای متغیر پیچیده‌کننده باشند، روش تولید ستون برای مسائلی کاربرد دارد که تعداد متغیرها بسیار بیشتر از تعداد محدودیت‌ها باشد و الگوریتم لاگرانژ با آزادسازی برخی محدودیت‌ها رسیدن به جواب بهینه را

4. Green multi-product production routing problem
5. Multi-level location-inventory problem

1. Dantzig-Wolfe Decomposition
2. Benders decomposition
3. Hub network design problem

$$\begin{aligned} u_{jk_2}^{\text{previous}2} &= u_{jk_2}, u_{jk_2} \\ &= \max(0, u_{jk_2} + \text{stepsize} * \text{gamma}2_{jk_2}) \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} u_{ik_2}^{\text{previous}3} &= u_{ik_2}, u_{ik_2} \\ &= \max(0, u_{ik_2} + \text{stepsize} * \text{gamma}3_{ik_2}) \end{aligned} \quad (49)$$

مرحله ۸-۴: همگرایی

$$\begin{aligned} \Delta u &= \max(|u_{k_1}^{\text{previous}1} - u_{k_1}|) \\ &+ \max(|u_{jk_2}^{\text{previous}2} - u_{jk_2}|) \\ &+ \max(|u_{ik_2}^{\text{previous}3} - u_{ik_2}|) \end{aligned} \quad (50)$$

$$\forall i \in N, j \in I, k_2 \in K_2$$

گام ۹: اگر پس از تعدادی مشخص تکرار متوالی در مقدار بهترین کران پایین بهبودی ایجاد نشد آنگاه $\theta = \theta/2$ و بازگشت به گام ششم
گام ۱۰: کران‌های اولیه گزارش می‌شوند.

۵. نتایج عددی

این بخش به نحوه تولید نمونه‌های آزمون و مقایسه نتایج عددی حاصل از حل مسأله‌های مختلف $FVRP$ چندناوگانی برای نمونه‌های مختلف توسط الگوریتم آزادسازی لاگرانژ با رویکرد بهینه‌سازی زیرگردان و اعتبارسنجی نتایج با استفاده از مقایسه نتایج مدل اصلی و مدل آزاد شده که با نرم‌افزار گمز حل شده‌اند صورت گرفته است. با این هدف از ورژن ۲.۲۵ نرم‌افزار گمز و حل‌کننده سیپلکس استفاده شده است.

۵-۱. تولید نمونه‌های آزمون

برای مقایسه نتایج الگوریتم آزادسازی لاگرانژ با خروجی‌های مدل اصلی دو گروه نمونه برای آزمون تولید می‌شوند. گروه اول $CO1$ ، در این گروه محل‌های گره‌ها در دو خوشه جداگانه توزیع شده‌اند. گروه دوم $CO2$ ، محل‌های گره‌ها به شکل تصادفی توزیع شده‌اند. شکل (۲)، توزیع ۲۰ گره برای هر کدام از این دو گروه داده را نشان داده که در این شکل گره قرمز رنگ به عنوان انبار در نظر گرفته شده است. هزینه بین گره‌ها بین برحسب فاصله بین گره‌ها محاسبه شده است. کامیون و موتورسیکلت به ترتیب 0.185 و 0.4 برابر واحد مسافت به عنوان هزینه بین گره‌ها محاسبه و همچنین زمان طی کردن بین گره‌ها برای کامیون و موتورسیکلت به ترتیب گرد شده ۲ و ۱ برابر این فاصله در نظر گرفته شده است. هزینه ثابت استفاده از کامیون‌ها ۴ واحد و موتورسیکلت‌ها ۲ واحد پولی در نظر گرفته شده است. زمان بارگذاری مجدد بر روی موتورسیکلت در نقاط تقاطع، همچنین زمان خدمت‌رسانی به مشتریان در گره‌ها برای کامیون و موتورسیکلت برابر با ۱۳ دقیقه محاسبه شده است. زمان شیفت کاری برابر با ۳۵۰ دقیقه و به همی مشتریانی بایستی در طول این زمان خدمت‌رسانی گردد. ظرفیت کامیون‌ها ۴۰۰ واحد و موتورسیکلت‌ها ۵۰ واحد در نظر گرفته شده‌اند.

۵-۲. مقایسه‌ی عملکرد الگوریتم آزادسازی لاگرانژ و خروجی‌های مدل اصلی

در این بخش به منظور اعتبارسنجی و تحلیل نتایج عددی مسأله $FVRP$ چندناوگانی حاصل از الگوریتم آزادسازی لاگرانژ و خروجی‌های

یکی از موارد مهم در الگوریتم آزادسازی لاگرانژ یافتن ضرایب لاگرانژ بهینه است. در این راستا الگوریتم بهینه‌سازی زیر گردان^۱ (SO) یکی از روش‌های رایجی است که بهترین ضرایب لاگرانژ را با استفاده از یک روش تکراری پیدا می‌کند. در این الگوریتم مسأله‌ی اصلی تعیین اندازه گام تا اطمینان حاصل شود که الگوریتم به جواب بهینه همگرا می‌شود، است [۱۵، ۱۶]. مراحل اجرای الگوریتم SO برای مسأله‌ی حاضر به شرح زیر بیان می‌شود:

گام ۱: تعیین محدودیت‌های (۱۲)، (۱۷) و (۱۸) برای آزادسازی

گام ۲: تعیین مقدار اولیه ضرایب لاگرانژ برابر با صفر و مقدار θ برابر با 0.1

گام ۳: انتقال محدودیت‌های آزاد شده به تابع هدف با استفاده از ضرایب لاگرانژ

گام ۴: محاسبه یک کران بالای اولیه شدنی (UB) با توجه به مسأله اصلی

گام ۵: قرار دادن مقدار کران پایین به کمترین مقدار ($LB = -\infty$)

گام ۶: حل مسأله آزاد شده و محاسبه مقادیر بهینه مسیره‌ها و LB

گام ۷: اگر $LB > LB^*$ آنگاه $LB^* = LB$

گام ۸: به روزرسانی مقادیر ضرایب لاگرانژ: در تکرارهای مختلف چهار مرحله زیر برای به روزرسانی ضرایب لاگرانژ تکرار می‌شوند.

زیرگام ۸-۱: محاسبه میزان نقض محدودیت‌های آزاد شده و به دست آوردن مجموع مربعات نقض محدودیت‌ها

$$\begin{aligned} \text{gamma}1_{k_1} &= \sum_{i \in N} \sum_{j \in N: i \neq j} q_j x_{ijk_1} \\ &+ \sum_{i, j \in N} \sum_{k_2 \in K_2} w_j y_{ijk_1 k_2} \\ &- g_{ok_1} \end{aligned} \quad (42)$$

$$\text{gamma}2_{jk_2} = f_{jk_2} - Q_{k_2}^m \left(1 - \sum_{k_1 \in K_1} w_{jk_1 k_2}\right) \quad (43)$$

$$\text{gamma}3_{ik_2} = f_{ik_2} - q_i y_{io k_2} + Q_{k_2}^m \left(1 - y_{io k_2}\right) \quad (44)$$

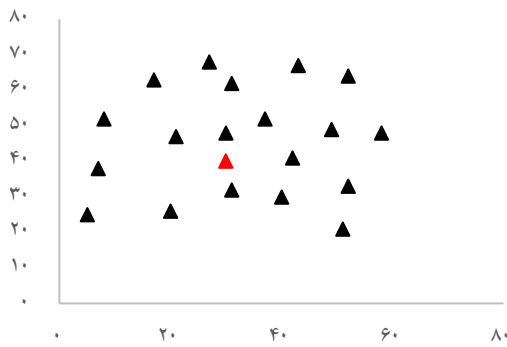
$$\begin{aligned} \text{norm} &= \sum_{k_1 \in K_1} (\text{gamma}1_{k_1})^2 \\ &+ \sum_{j \in I} \sum_{k_2 \in K_2} (\text{gamma}2_{jk_2})^2 \\ &+ \sum_{i \in N} \sum_{k_2 \in K_2} (\text{gamma}3_{ik_2})^2 \end{aligned} \quad (45)$$

مرحله ۸-۲: محاسبه طول گام

$$\text{stepsize} = \theta \cdot \left(\frac{UB - LB^*}{\text{norm}} \right) \quad (46)$$

مرحله ۸-۳: به روزرسانی ضرایب لاگرانژ

$$\begin{aligned} u_{k_1}^{\text{previous}1} &= u_{k_1}, u_{k_1} \\ &= \max(0, u_{k_1} + \text{stepsize} * \text{gamma}1_{k_1}) \end{aligned} \quad (47)$$



ب- دومین گروه از نمونه‌ها (CO2)
شکل (۲). توزیع مشتریان برای نمونه با ۲۰ گره

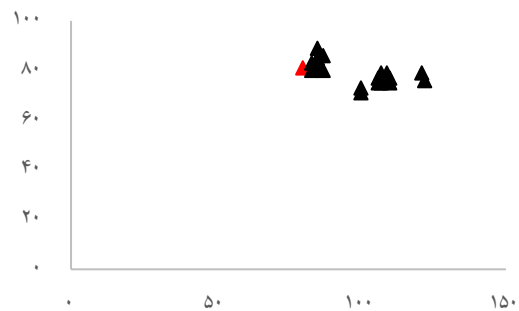
۶. نتیجه‌گیری و مطالعات آتی

حمل‌ونقل کالا به‌علت تأثیر مستقیمی که در قیمت، دسترسی، کیفیت و موجودی محصول می‌گذارد، دارای نقش کلیدی در شبکه‌های توزیع است. در این میان مسأله *VRP* یکی از رایج‌ترین مسائل بهینه‌سازی ترکیبیاتی است که به‌دلیل اهمیت کاربردی و پیچیدگی حل آن از محبوبیت فراوانی بین محققان برخوردار است. در فرآیند توزیع حمل‌ونقل شهری در مسأله کلاسیک *VRP*، درحالتی که تقاضای مشتریان کمی بیش از ظرفیت یک وسیله نقلیه باشد، بایستی از وسیله نقلیه دیگر استفاده نمود که باعث افزایش هزینه‌ها می‌گردد. برخلاف *VRP*، در مسأله *FVRP*، می‌توان به‌جای استفاده از وسیله نقلیه دیگر، از وسایل نقلیه کوچک با ظرفیت کم استفاده نمود که معمولاً هزینه یک وسیله نقلیه کوچک از یک وسیله نقلیه بزرگ به‌مراتب کمتر و صرفه‌جویی در هزینه را به‌دنبال دارد؛ که در این حالت وسیله‌ی نقلیه بزرگتر نقش تغذیه‌کننده را دارد. از این‌رو در این مطالعه مسأله مسیریابی وسیله نقلیه تغذیه‌کننده چندناوگانی با حداقل دو کامیون و دو موتورسیکلت بررسی گردید. مدل ریاضی *MILP* برای حداقل کردن هزینه‌های ثابت و متغیر سفر درحالتی که موتورسیکلت‌ها می‌توانند در نقاطی به‌نام تقاطع با کامیون‌ها برای بارگیری مجدد ملاقات کنند مطالعه گردید. همچنین به‌دلیل پیچیدگی بالای مدل ریاضی ارائه شده و کاهش زمان حل مدل در ابعاد بالا، الگوریتم آزادسازی لاگرانژ با رویکرد بهینه‌سازی زیر‌گرادیان برای مسأله *FVRP* چندناوگانی توسعه داده شد. نتایج نشان داد که صرفه‌جویی زمانی حاصل از حل مدل با الگوریتم آزادسازی لاگرانژ قابل‌توجه بوده و در نتیجه الگوریتم آزادسازی لاگرانژ برای حل مدل کارا است. *FVRP* نوع جدیدی از انواع *VRP* است که در حمل‌ونقل شهری کاربرد زیادی دارد. همچنین باتوجه به جدید بودن مسأله و کاربردی بودن آن در دنیای واقعی، می‌توان توسعه‌های متعددی را در رابطه با تعریف مسأله و روش‌های حل پیشنهاد کرد. توسعه مدل‌سازی مسأله مسیریابی وسیله نقلیه تغذیه‌کننده، مانند در نظر گرفتن جنبه‌های زیست‌محیطی و اجتماعی، چند انباره کردن، در نظر گرفتن پنجره‌های زمانی در مسأله و ... پیشنهاد می‌گردد. در نظر گرفتن رویکردهای ابتکاری و دقیق حل بر پایه تجزیه مانند تجزیه بندرز و روش شاخه و قیمت به‌عنوان نمونه‌ای

مدل اصلی برای نمونه‌های با ۸ تا ۲۰ گره استفاده می‌شود. نمونه‌های آزمون به دو شکل آماده شده‌اند: (الف) گره‌های با تقاضای بین ۵ تا ۲۵ (*a*) و (ب) گره‌های با تقاضای ۱۵ واحد (*b*). مقادیر تابع هدف، زمان حل و شکاف بهینگی حاصل از حل الگوریتم آزادسازی لاگرانژ و خروجی‌های مدل اصلی در جدول (۳) گزارش شده‌اند. مقدار شکاف بهینگی از رابطه‌ی (۵۱) به‌دست می‌آید.

$$DG = \frac{FS - LB}{LB} \times 100 \quad (51)$$

که در این رابطه *DG* شکاف بهینگی و *FS* مقدار تابع هدف به‌دست‌آمده از خروجی‌های مدل اصلی می‌باشد. از آنجایی که الگوریتم آزادسازی لاگرانژ یک کران پایین ارائه می‌دهد خروجی این الگوریتم به‌عنوان کران پایین در نظر گرفته می‌شود [۱۶]. نتایج به‌دست آمده از جدول (۳) نشان از شکاف بهینگی حداقلی بین الگوریتم آزادسازی لاگرانژ و مدل اصلی را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌گردد، برخلاف خروجی‌های مدل اصلی در نمونه‌های بیشتر از ۱۷ گره به جواب بهینه نرسیده است، الگوریتم آزادسازی لاگرانژ در زمان‌های کمتر از خروجی‌های مدل اصلی به جواب رسیده است. باتوجه به جدول (۳)، با افزایش ابعاد مسأله، زمان حل مسأله در خروجی‌های مدل اصلی افزایش زیادی یافته است. درحالی‌که در حالت استفاده از الگوریتم آزادسازی لاگرانژ، این زمان کوتاه بوده و نشان‌دهنده کارایی الگوریتم آزادسازی لاگرانژ در حل مدل ارائه شده در این پژوهش است. به‌عنوان یک مزیت، به‌دلیل آنکه در الگوریتم آزادسازی لاگرانژ برخی محدودیت‌ها آزاد شده‌اند، این روش توانسته یک کران بسیار مطلوب برای مدل مسأله *FVRP* چندناوگانی بیابد. شکل (۳) روند تغییر پارامترهای طول گام و Δu برای مثال نمونه با ۹ گره در ۱۰۰ تکرار را نشان می‌دهد. این شکل روند مناسب الگوریتم آزادسازی لاگرانژ را نشان می‌دهد. شکل (۴)، نمودار مقایسه میزان تابع هدف حاصل از حل روش آزادسازی لاگرانژ و خروجی‌های مدل اصلی را نشان می‌دهد. باتوجه به شکل (۴)، میزان اختلاف بین مقادیر هدف حاصل شده از حل مسائل نمونه مختلف بسیار ناچیز است. شکل (۵)، نمودار زمان حل مدل مسأله‌ی *FVRP* چندناوگانی با استفاده از روش آزادسازی لاگرانژ و خروجی‌های مدل اصلی را نشان می‌دهد. باتوجه به نمودار می‌توان فهمید که صرفه‌جویی زمانی حاصل از حل مدل با الگوریتم آزادسازی لاگرانژ قابل‌توجه بوده و در نتیجه الگوریتم آزادسازی لاگرانژ برای حل مدل کارا است.



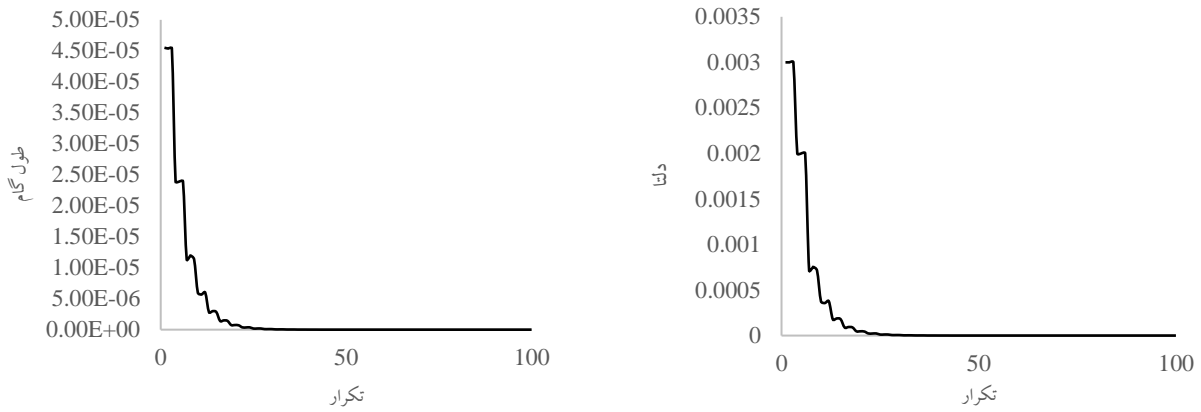
الف- اولین گروه از نمونه‌ها (CO1)

دیگر برای مطالعات آتی پیشنهاد می‌گردد. همچنین الگوریتم‌های شبتاب، رویکردهای بهینه استوار و ترکیب الگوریتم‌های فراابتکاری با فراابتکاری‌های مبتنی بر جمعیت مانند کلونی زنبورهای مصنوعی، کرم تکنیک‌های جستجوی محلی مانند $2-opt$ ، $3-opt$ پیشنهاد می‌گردد.

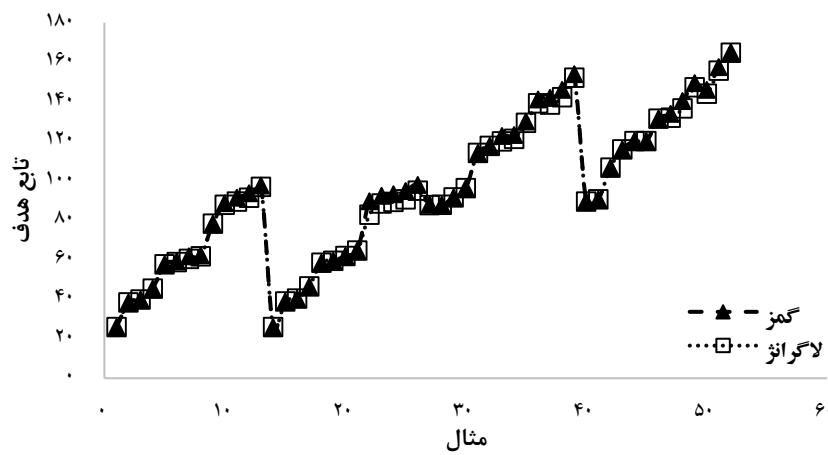
جدول (۳). نتایج عددی الگوریتم آزادسازی لاگرانژ

شکاف بهینگی %	الگوریتم آزادسازی لاگرانژ		مدل اصلی (گمزر)		تعداد مشتری	مسئله	گروه
	زمان	هزینه	زمان	هزینه			
۰/۰۰	۲۷/۲۷	۲۵/۷۹	۳۷/۸۰	۲۵/۷۹	۸	۱	
۰/۰۰	۶۰/۷۳	۳۸/۳۵	۱۳۳/۹۷	۳۸/۳۵	۹	۲	
۰/۰۰	۱۸۵/۷۴	۳۹/۷۲	۲۲۰/۵۹	۳۹/۷۲	۱۰	۳	
۰/۰۰	۲۴۴/۲۵	۴۵/۳۷	۲۲۷/۹۴	۴۵/۳۷	۱۱	۴	
۰/۰۰	۱۶۱۲/۹۶	۵۷/۶۴	۴۸۵۹/۲۲	۵۷/۶۴	۱۲	۵	
۰/۵۸	۱۹۷۰/۶۳	۵۸/۷۹	۸۴۹۱/۰۳	۵۹/۱۳	۱۳	۶	
۲/۱۹	۲۲۵۹/۳۶	۶۰/۳۱	۱۳۰۰۸/۵۹	۶۱/۶۳	۱۴	۷	C01-a
۰/۷۸	۱۳۳۵/۵۳	۶۱/۷۱	۲۴۵۱۴/۶۹	۶۲/۱۹	۱۵	۸	
۰/۰۳	۱۴۶۷۰/۰۶	۷۸/۲۵	۲۷۱۳۳/۲۰	۷۸/۲۷	۱۶	۹	
۰/۸۰	۲۰۶۱۸/۶۹	۸۷/۸۴	۵۰۰۰۰	۸۸/۵۴*	۱۷	۱۰	
۲/۱۸	۲۱۷۳۴/۸۴	۸۹/۴۶	۵۰۰۰۰	۹۱/۴۱*	۱۸	۱۱	
۲/۴۱	۲۷۲۲/۱۳	۹۱/۳۹	۵۰۰۰۰	۹۳/۵۹*	۱۹	۱۲	
۰/۶۹	۳۰۵۳/۷۵	۹۶/۸۰	۵۰۰۰۰	۹۷/۴۷*	۲۰	۱۳	
۰/۰۸	۱۵/۵۵	۲۵/۸۹	۲۷/۱۲	۲۵/۹۱	۸	۱۴	
۰/۰۰	۲۰/۵۱	۳۸/۸۴	۴۴/۶۰	۳۸/۸۴	۹	۱۵	
۰/۰۰	۱۵۱/۸۶	۴۰/۳۱	۳۵۷/۷۹	۴۰/۳۱	۱۰	۱۶	
۰/۰۰	۱۶۶/۵۳	۴۶/۴۲	۵۸۱/۵۹	۴۶/۴۲	۱۱	۱۷	
۰/۰۰	۳۸۱/۶۱	۵۸/۵۱	۷۵۵/۹۲	۵۸/۵۱	۱۲	۱۸	
۰/۰۰	۱۴۴۴/۹۱	۵۹/۴۴	۲۱۵۰/۸۰	۵۹/۴۴	۱۳	۱۹	
۰/۰۲	۲۵۸۱/۳۰	۶۱/۸۴	۵۱۰۵/۷۳	۶۱/۸۵	۱۴	۲۰	C01-b
۰/۰۰	۳۷۸۲/۸۹	۶۴/۵۴	۱۷۶۲۷/۸۱	۶۴/۵۴	۱۵	۲۱	
۸/۲۰	۴۵۹۳/۴۵	۸۲/۷۷	۲۷۰۳۳/۲۴	۸۹/۵۶	۱۶	۲۲	
۴/۴۱	۸۹۰۷/۳۹	۸۸/۳۴	۵۰۰۰۰	۹۲/۲۴*	۱۷	۲۳	
۴/۲۹	۱۲۲۲۲/۳۶	۸۹/۲۶	۵۰۰۰۰	۹۳/۰۹*	۱۸	۲۴	
۴/۶۱	۱۵۴۵۴/۹۱	۹۰/۵۴	۵۰۰۰۰	۹۴/۷۱*	۱۹	۲۵	
۳/۰۷	۱۷۶۲۵/۳۹	۹۴/۹۳	۵۰۰۰۰	۹۷/۸۴*	۲۰	۲۶	
۰/۲۶	۳/۷۰	۸۷/۵۹	۴/۲۱	۸۷/۸۲	۸	۲۷	
۰/۰۰	۵/۴۵	۸۷/۸۴	۹/۹۵	۸۷/۸۴	۹	۲۸	
۰/۰۰	۱۸/۶۹	۹۱/۴۲	۳۳/۷۷	۹۱/۴۲	۱۰	۲۹	
۰/۰۰	۳۰/۸۹	۹۶/۱۴	۴۳/۹۴	۹۶/۱۴	۱۱	۳۰	
۰/۰۰	۴۸۳/۱۳	۱۱۴/۱۱	۱۵۴۲/۶۲	۱۱۴/۱۱	۱۲	۳۱	
۰/۰۰	۳۶۷۸/۹۵	۱۱۷/۵۶	۵۳۹۵/۲۰	۱۱۷/۵۶	۱۳	۳۲	
۲/۳۳	۴۴۸۸/۴۱	۱۱۹/۸۹	۱۱۸۵۶/۲۲	۱۲۲/۶۸	۱۴	۳۳	C02-a
۱/۶۱	۵۹۴۳/۱۴	۱۲۱/۲۰	۲۰۲۰۱/۹۸۴	۱۲۳/۱۵	۱۵	۳۴	
۰/۴۵	۶۵۰۱/۳۰	۱۲۹/۲۸	۲۸۶۰۴/۳۵	۱۲۹/۸۶	۱۶	۳۵	
۱/۳۱	۹۶۲۰/۳۳	۱۳۹/۲۳	۵۰۰۰۰	۱۴۱/۰۶*	۱۷	۳۶	
۲/۴۳	۱۴۰۳۱/۳۳	۱۳۸/۵۵	۵۰۰۰۰	۱۴۱/۹۳*	۱۸	۳۷	
۲/۵۹	۱۶۹۷۰/۳۰	۱۴۲/۲۸	۵۰۰۰۰	۱۴۵/۹۷*	۱۹	۳۸	
۱/۱۰	۱۸۵۵۱/۵۸	۱۵۲/۱۵	۵۰۰۰۰	۱۵۳/۸۳*	۲۰	۳۹	
۰/۱۶	۳/۴۹	۸۹/۴۵	۲/۹۷	۸۹/۵۹	۸	۴۰	
۰/۰۰	۹/۷۷	۹۰/۴۷	۱۷/۰۱	۹۰/۴۷	۹	۴۱	
۰/۰۰	۲۵/۵۹	۱۰۶/۶۳	۲۱۰/۴۷	۱۰۶/۶۳	۱۰	۴۲	
۰/۰۰	۱۷۳/۹۱	۱۱۵/۸۸	۵۷۲/۸۹	۱۱۵/۸۸	۱۱	۴۳	
۰/۰۰	۸۴۲/۰۸	۱۲۰/۰۷	۴۴۶۳/۱۳	۱۲۰/۰۷	۱۲	۴۴	
۰/۰۰	۹۶۸/۰۲	۱۱۹/۹۹	۴۷۷۲/۷۸	۱۱۹/۹۹	۱۳	۴۵	
۰/۰۰	۱۰۶۲/۳۶	۱۳۱/۴۵	۴۱۴۹/۹۴	۱۳۱/۴۵	۱۴	۴۶	C02-b
۱/۳۹	۱۰۳۶/۵۸	۱۳۱/۹۱	۱۸۷۵۱/۲۸	۱۳۳/۷۵	۱۵	۴۷	
۲/۷۸	۴۷۱۳/۹۸	۱۳۶/۴۹	۲۷۷۱۱/۳۴	۱۴۰/۲۹	۱۶	۴۸	
۱/۵۲	۵۳۸۳/۸۶	۱۴۷/۱۹	۵۰۰۰۰	۱۴۹/۴۳*	۱۷	۴۹	
۱/۳۶	۱۲۹۶۴/۹۹	۱۴۳/۹۹	۵۰۰۰۰	۱۴۵/۹۵*	۱۸	۵۰	
۱/۱۴	۱۷۹۱۰/۷۰	۱۵۵/۷۴	۵۰۰۰۰	۱۵۷/۵۲*	۱۹	۵۱	
۰/۱۹	۱۹۹۴۴	۱۶۴/۷۰	۵۰۰۰۰	۱۶۵/۰۲*	۲۰	۵۲	

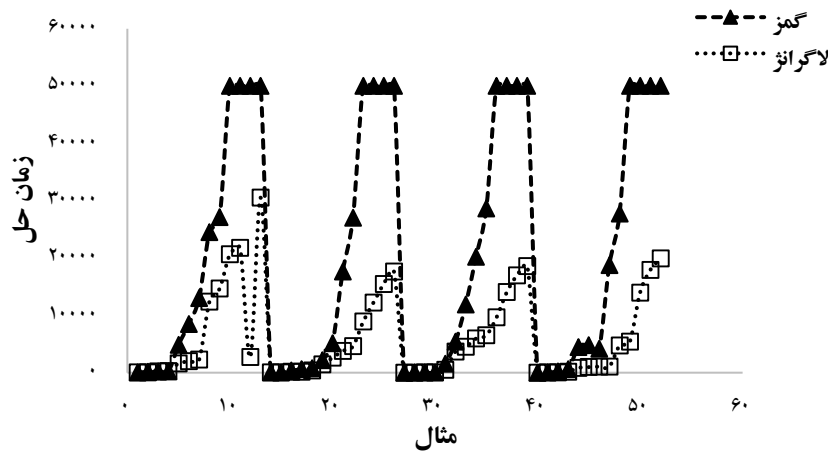
* بهترین حل‌ها در ۵۰۰۰۰ ثانیه گزارش شده‌اند.



شکل (۳). تغییرات پارامترهای الگوریتم آزادسازی لاگرانژ در مثال نمونه



شکل (۴). نمودار مقایسه تابع هدف حل الگوریتم آزادسازی لاگرانژ و خروجی‌های مدل اصلی



شکل (۵). نمودار مقایسه زمان حل الگوریتم آزادسازی لاگرانژ و خروجی‌های مدل اصلی

Chung Hua University, Hsin Chu, Taiwan, 2001.

[3] Chang, J., Y.J. Cho, and Y.C. Hwang. A study on time constrained vehicle routing problem for lunch box delivery. in in Proceedings of the Annual Meeting of Chinese Institute of Industrial Engineering. 2001. Kaohsiung, Taiwan.

[4] Chen, H.K., et al., The linehaul-feeder vehicle routing problem with virtual depots. IEEE Transactions on

مراجعه

[1] Salehi Sarbijan, M. and J. Behnamian, Multi-fleet feeder vehicle routing problem using hybrid metaheuristic. Computers & Operations Research, 2022. 141: p. 105696.

[2] Tu, s., S. Lai, and Y. Li, Application of the vehicle routing problem with time windows—an example of lunch box delivery. Graduation Term Paper, Department of Transportation Technology and Logistics Management,

- system with economies-of-scale and congestion. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 2019. 102. p. 249-273.
- [16] Afra, A.P. and J. Behnamian, Lagrangian heuristic algorithm for green multi-product production routing problem with reverse logistics and remanufacturing. *Journal of Manufacturing Systems*, 2021. 58: p. 33-43.
- [17] Diabat, A., J.-P. Richard, and C.W. Codrington, A Lagrangian relaxation approach to simultaneous strategic and tactical planning in supply chain design. *Annals of Operations Research*, 2013. 203(1): p. 55-80.
- [18] Imai, A., E. Nishimura, and J. Current, A Lagrangian relaxation-based heuristic for the vehicle routing with full container load. *European journal of operational research*, 2007. 176(1): p. 87-105.
- [19] Hamdan, B. and A. Diabat, Robust design of blood supply chains under risk of disruptions using Lagrangian relaxation. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 2020. 134: p. 101764.
- [۲۰] توکلی مقدم، رضا، حسینی، سید محمد حسن، عموزاد خلیلی، حسین. مدل سازی و حل مسأله زنجیره تأمین ساخت بر مبنای سفارش در شرایط محدودیت ظرفیت تولید با استفاده از الگوریتم آزادسازی لاگرانژی. نشریه پژوهش‌های مهندسی صنایع در سیستم‌های تولید، ۱۳۹۸، ۷(۱۴): ۱۶۱-۱۴۷.
- [۲۱] کلوندی، الهه، بهنامیان، جواد. آزادسازی لاگرانژی برای زمان بندی جریان کارگاهی منعطف در شبکه‌های چند کارخانه‌یی ناهمسان. مهندسی صنایع و مدیریت، ۱۴۰۰؛ ۳۷.۱(۲): ۱۲۱-۱۱۳.
- [22] Yang, S., et al., Augmented Lagrangian relaxation approach for logistics vehicle routing problem with mixed backhauls and time windows. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 2020. 135: p. 101891.
- [23] Nezhad, A.M., H. Manzour, and S. Salhi, Lagrangian relaxation heuristics for the uncapacitated single-source multi-product facility location problem. *International Journal of Production Economics*, 2013. 145(2): p. 713-723.
- Automation Science and Engineering, 2011a. 8(4): p. 694-704.
- [5] Chen, H.K., H.W. Chou, and C.Y. Hsu, The linehaul-feeder vehicle routing problem with virtual depots and time windows. *Mathematical Problems in Engineering*, 2011 b: p. 1-15.
- [6] Chen, H.K. and H. Wang, A two-stage algorithm for the extended linehaul-feeder vehicle routing problem with time windows. *International Journal of Shipping and Transport Logistics* 2012. 4(4): p. 339-356.
- [7] Chen, H.K., Issues for the linehaul-feeder vehicle routing problem with virtual depots and time windows. *Journal of the Eastern Asia Society for Transportation Studies*, 2015. 11: p. 678-692.
- [8] Brandstätter, C. and M. Reimann, The line-haul feeder vehicle routing problem: Mathematical model formulation and heuristic approaches. *European Journal of Operational Research*, 2018a. 270(1): p. 157-170.
- [9] Brandstätter, C. and M. Reimann, Performance analysis of a metaheuristic algorithm for the line-haul feeder vehicle routing problem. *Journal on Vehicle Routing Algorithms*, 2018b. 1(2-4): p. 121-138.
- [10] Brandstätter, C., A metaheuristic algorithm and structured analysis for the Line-haul Feeder Vehicle Routing Problem with Time Windows. *Central European Journal of Operations Research*, 2019: p. 1-43.
- [11] Huang, Y.-H., et al., Solving the Feeder Vehicle Routing Problem using ant colony optimization. *Computers & Industrial Engineering*, 2019. 127: p. 520-535.
- [12] Salehi Sarbijan, M. and J. Behnamian, Real-time collaborative feeder vehicle routing problem with flexible time windows. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2022. 75: p. 101201.
- [13] Conejo, A.J., et al., Decomposition techniques in mathematical programming: engineering and science applications. 2006: Springer Science & Business Media.
- [14] Guignard, M., Lagrangean relaxation. *Top*, 2003. 11(2): p. 151-200.
- [15] Alkaabneh, F., A. Diabat, and S. Elhedhli, A Lagrangian heuristic and GRASP for the hub-and-spoke network



DOI: 10.22084/IER.2023.27033.2097

Lagrangian Relaxation Algorithm for Solving Multi-Fleet Feeder Vehicle Routing Problem

M. Salehi Sarbijan¹, J. Behnamian^{2*}

¹ Ph.D. student, Department of Industrial Engineering, Faculty of Engineering, Bu-Ali Sina University, Hamedan, Iran.

² Associate Professor, Department of Industrial Engineering, Faculty of Engineering, Bu-Ali Sina University, Hamedan, Iran.

ARTICLE INFO

Article history:

Received 03 May 2022

Accepted 12 Nov 2022

Keywords:

Feeder Vehicle Routing Problem
Multi-Fleet Vrp
Lagrangian Relaxation
Subgradient Optimization

ABSTRACT

Receiving fast, flexible, reliable and low-cost delivery services by customers is one of the important challenges for the distribution of goods, especially in urban areas. After that, with the increase in demand and as a result, the increase in vehicles for the purpose of goods' transportation, it causes congestion in urban transportation networks. Therefore, in this study, the multi-fleet feeder vehicle routing problem is investigated in a situation where several trucks and motorcycles cooperate with each other to satisfy the demand at the same time. The feeding vehicle routing problem consists of a heterogeneous fleet of vehicles, including trucks and it makes it possible for motorcycles to pass in high-traffic areas and distribute urban traffic easily. In fact, the feeder approach in the VRP is to reduce the number of times of returning to the main depot for loading and to save the cost and time of tours. Here, at first, a mathematical model is presented, then, due to the high complexity of the mixed integer programming model and in order to reduce the runtime of solving the model in large dimensions, the Lagrangian relaxation algorithm with the sub-gradient optimization approach is proposed. The results showed that with the increase in the dimensions of the problem, the runtime of the proposed algorithm is less compared to the outputs of GAMS. Also, the runtime saving resulting from solving the model with the Lagrangian relaxation algorithm is significant, and as a result, this algorithm is effective for solving the model.

* Corresponding author. J. Behnamian
Tel.: 081-38292505; E-mail address: Behnamian@Basu.ac.ir