نشـریه پـژوهـش‌های مهنـدسـی صنـــایع در سیستـــم‌هـــای تولیـــد

سال اول شماره سوم بهار و تابستان ۱۳۹۳، صفحــــــه ۷۷-۹۱

www.ier.basu.ac.ir

نشـــریه پـــژوهـــش‌های مهنـــدســی صنـــــایع در سیستـــم‌هـــای تولیـــد

IERPS

ISSN: 2345-2269

مدل اندازه سفارش اقتصادی با پرداخت معوقه‌ی جزئی و وابسته به حجم سفارش برای محصولات زوال‌پذیر

نادیا پورمحمدضیا[1]، عطاالله طالعی‌زاده[2,*]

۱. دانشجوی کارشناسی‌ارشد گروه مهندسی صنایع، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران

۲. استادیار گروه مهندسی صنایع، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:

دریافت ۱۳۹۲/۹/۳۰

پذیرش ۱۳۹۳/۴/۱۵

کلمات کلیدی:

مدل‌های موجودی، اندازه سفارش اقتصادی، پرداخت معوقه جزئی، پرداخت معوقه وابسته به سطح سفارش، زوال موجودی

خلاصه

تأمین‌کنندگان برای افزایش میزان فروش، عموماً امکان پرداخت معوقه را در شرایطی که میزان خرید فروشنده از حد معینی فراتر باشد فراهم می‌نمایند. در این مطالعه به بررسی سیستم موجودی سفارش اقتصادی با فرض امکان پرداخت معوقه وابسته به میزان سفارش برای محصولات زوال‌پذیر در یک زنجیره تأمین پرداخته‌ایم. در صورتی‌که حجم سفارش از سوی فروشنده از میزان معینی بالاتر باشد پرداخت معوقه به شکل کامل و در غیر این صورت به شکل جزئی امکان‌پذیر خواهد بود. قیمت خرید و فروش یکسان نبوده و نرخ هزینه‌ی سرمایه لزوماً بزرگ‌تر از بهره‌ی دریافتی از بانک نیست. برای تعیین پاسخ بهینه و منحصر بفرد لم‌ها و قضایای متعددی تعریف شده که در ایجاد الگوریتم حل ارائه شده به‌کار بسته شده است. در نهایت برای نمایش اعتبار مدل ارائه شده و کارائی روش حل مورد استفاده به ارائه تعدادی مسئله نمونه و تحلیل نتایج حاصل پرداخته‌ایم.

۱- مقدمه

در سال‌های اخیر، پژوهشگران در حوزه کنترل موجودی بیش از پیش به بررسی مسائل عملکردی حاکم بر فضای رقابتی حاضر، روی آورده‌اند. این فضای رقابتی فروشندگان را بر آن داشته است که برای افزایش میزان فروش و ایجاد مزیت رقابتی امکانات و امتیازات ویژه‌ای در اختیار خریدار قرار دهند؛ پرداخت معوقه یکی از این امتیازات برای ترغیب خریدار به‌شمار می‌آید. مدل کلاسیک سفارش اقتصادی (EOQ) بر این فرض استوار است که هزینه خرید بلافاصله پس از سفارش‌دهی پرداخت می‌شود حال آن‌که، همان‌گونه که اشاره شد، عموماً تأمین‌کنندگان بازه‌ای زمانی برای پرداخت هزینه خرید در اختیار خریدار قرار می‌دهند [1] که نه تنها موجب ترغیب وی و افزایش میزان خرید می‌شود بلکه این امکان را به او می‌دهد که با استفاده از این فرصت، هزینه سرمایه خود را کاهش دهد. در این فاصله زمانی خریدار قادر است با فروش محصولات خریداری شده از تأمین‌کننده، درآمد حاصل را سرمایه‌گذاری کرده و سود خود را افزایش دهد [2].

از طرفی اغلب محصولات، ارزش تجاری خود را در طول زمان از دست می‌دهند و برای برخی از محصولات سرعت این فرآیند فراتر از حد معمول است. این محصولات اصطلاحاً محصولات زوال‌پذیر یا فاسدشدنی نامیده می‌شوند. در مسائل موجودی، زوال به معنای آسیب، فساد، خرابی، تبخیر، منسوخ شدن، کاهش دارائی و ارزش حاشیه‌ای محصولات است که منجر به کاهش قابلیت استفاده از محصولات می‌شود [3]. از آنجائی‌که زوال به‌دلیل از بین رفتن بخشی از موجودی منجر به تحمیل هزینه اضافه به سیستم می‌شود تعیین سیاست مناسب موجودی محصولات زوال‌پذیر از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

در این پژوهش مدل چانگ و همکاران [4] با در نظر داشتن زوال موجودی توسعه داده شده است. فرض بر این است که پرداخت معوقه وابسته به حجم سفارش بوده و در شرایطی که این میزان از حجم معینی کمتر باشد پرداخت معوقه به شکل جزئی و در غیر این صورت به شکل کلی مجاز خواهد بود. همانند مطالعه‌ی چانگ و همکاران، نرخ بهره‌ی پرداختی توسط بانک لزوما کمتر از نرخ هزینه‌ی سرمایه نبوده و هزینه‌ی خرید و فروش محصول برابر نیستند.

* نویسنده مسئول. عطاالله طالعی‌زاده

تلفن: ۸۲۰۸۴۴۸۶-۰۲۱ ؛ پست الکترونیکی: taleizadeh@ut.ac.ir

پرداخت معوقه یکی از مؤلفه‌ای معمول تبادلات تجاری و عامل محرک افزایش میزان فروش در کوتاه‌مدت به‌شمار می‌آید [۵]. از آنجائی‌که فرض پرداخت معوقه هزینه‌های سیستم از جمله هزینه نگهداری موجودی و در نتیجه میزان سفارش اقتصادی را تحت‌الشعاع قرار می‌دهد [۶] مطالعات زیادی به بررسی میزان سفارش اقتصادی در شرایط پرداخت معوقه پرداخته‌اند. از مطالعات آغازین در این زمینه که با وجود مفروضات ساده، مبنائی برای پژوهش‌های آتی قرار گرفته‌اند می‌توان به مقالات مراجع [۷، ۸، ۹ و ۱۰] اشاره نمود. به‌طورکلی حوزه ادبیات موضوع پژوهش پیش‌رو را می‌توان به سه بخش کلی تقسـیم کـرد که عبارتند از: مدل‌های پرداخت معوقه کلاسیک، مدل‌های پرداخت معوقه وابسته به سطح سفارش و مدل‌های پرداخت معوقه با در نظر داشتن زوال موجودی.

۱) مدل‌های پرداخت معوقه کلاسیک

مدل ارائه شده توسط گویال [۱۰] مبنای بسیاری از مطالعات صورت گرفته در زمینه پرداخت معوقه قرار گرفته است. در مطالعه ونترا و همکاران [۱۱] مدل گویال [۱۰] با افزودن فرض امکان پرداخت معوقه از سوی خریدار به مشتری مورد بررسی قرار گرفته است. تنگ [۱۲] و دیو [۱۳] مدل گویال [۱۰] را با در نظر داشتن تفاوت قیمت خرید و فروش توسعه داده اند. لیااو و همکاران [۱۴] به ارائه مدل سفارش اقتصادی با تقاضای وابسته به سطح موجودی در شرایط امکان پرداخت معوقه پرداخته اند و در مطالعه‌ی جاگی و همکاران [۱۵] مدل سفارش اقتصادی با عدم امکان کمبود و پرداخت معوقه‌ی دو سطحی مورد بررسی قرار گرفته است. در این مدل تقاضای مشتری وابسته به طول زمان ممکن برای پرداخت معوقه بوده و نرخ هزینه سرمایه و بهره پرداختی لزوماً برابر نیستند. مطالعه هانگ و هسو [۱۶] نیز مدل مشابهی را مورد بررسی قرار داده است. سونی و شاه [۱۷] ساختاری سه سطحی برای نرخ هزینه‌ی سرمایه‌گذاری شامل یک دوره بدون بهره، یک دوره با نرخ بهره I_{c1} و دوره بعدی با نرخ $I_{c2} > I_{c1}$ پیشنهاد داده‌اند. چن و کانگ [۱۸] به مقایسه دو حالت پرداخت معوقه یک سطحی و دوسطحی پرداخته اند که نتایج حاصل نشان داده است که پرداخت معوقه دوسطحی موجب کاهش سود زنجیره تأمین می‌شود.

۲) مدل‌های پرداخت معوقه وابسته به سطح سفارش

مطالعه خوجی و مهرز [۱۹] را می‌توان به‌عنوان اولین پژوهشی در نظر گرفت که امکان پرداخت معوقه را وابسته به سطح سفارش کرده است. به این معنا که تأمین‌کننده تنها در صورتی به خریدار امکان پرداخت معوقه هزینه خرید را می‌دهد که سطح سفارش از میزان معینی بالاتر باشد. شین و هوآنگ [۲۰] به بهینه‌سازی قیمت و میزان سفارش در شرایط پرداخت معوقه وابسته به حجم سفارش پرداخته‌اند. در این مدل فرض شده است که طول دوره پرداخت معوقه تابعی از سطح سفارش بوده و تقاضا نیز وابسته به قیمت فروش است. اویانگ و همکاران [۲۱] مدل یکپارچه‌ای با نرخ تولید متغیر، پرداخت معوقه وابسته به حجم سفارش و تقاضای وابسته به قیمت فروش ارائه کرده‌اند. هوآنگ [۲۲] مدل سفارش اقتصادی با پرداخت معوقه وابسته به حجم سفارش را در حالت جدیدی بررسی کرده است به این نحو که اگر حجم سفارش از میزان معینی بیشتر باشد پرداخت معوقه به شکل کلی و در غیر اینصورت به شکل جزئی خواهد بود. چانگ و همکاران [۴] مدل هوآنگ [۲۰] را با فرض اینکه نرخ هزینه سرمایه لزوما بزرگتر از نرخ بهره دریافتی از بانک نبوده و قیمت خرید و فروش یکسان نیستند توسعه داده است. این مقاله روش حل متفاوتی نسبت به روش هوآنگ ارائه کرده است.

۳) مدل‌های پرداخت معوقه با در نظر داشتن زوال موجودی

آگاروال و جاگی [۲۳] مدل گویال [۱۰] را با در نظر داشتن زوال موجودی مورد بررسی قرار داده اند و در مطالعه جمال و همکاران [۲۴] این مدل با افزودن فرض کمبود علاوه بر زوال موجودی توسعه یافته است. سارکر و همکاران [۲۵] و چانگ و همکاران [۲۶] مسئله مطرح شده را به‌ترتیب با افزودن نرخ تورم و تابع خطی تقاضا مدلسازی نموده‌اند. یانگ [۲۷] مسئلهٔ پرداخت معوقه را با در نظر داشتن زوال موجودی، کمبود، تورم و انبار دوگانه مدلسازی کرده است که در مطالعه‌ی ژو و یانگ [۲۸] با در نظر داشتن تقاضای وابسته به سطح موجودی و هزینه‌ی حمل و نقل توسعه یافته است.

زمینه مورد بررسی در این مقاله از سوی بسیاری از محققین مورد بررسی قرار گرفته است و صرفاً بخشی از این تحقیقات در قسمت مرور اربیات ارائه شده است. اما نکته قابل توجه این است که در هیچ‌یک از موارد فوق با توجه به آن‌چه در مرور ادبیات موضوع به چشم می‌خورد فرض همزمان مسئله زوال موجودی و پرداخت معوقه‌ی وابسته به سطح سفارش‌دهی، بررسی نشده است. نوآوری اصلی مقاله در لحاظ کردن پرداخت معوقه وایسته به میزان سفارش برای کالاهای فسادپذیر است که پیچیدگی مدل را به‌شدت افزایش می دهد.

ادامه مقاله به شکل مقابل ساختار یافته است: بخش دوم به تبیین ساختار مدل موجودی ارائه شده می‌پردازد. در بخش سوم به تشریح روش حل مورد استفاده پرداخته و نتایج عددی در بخش چهارم پژوهش ارائه شده‌است. در نهایت پژوهش پیش رو با ارائه نتیجه‌گیری و رویکردهای آتی در بخش پنجم پایان می‌یابد.

۲- مدل سازی ریاضی

نمادگذاری:

پارامترها

A	هزینه هر بار سفارش‌دهی
D	تقاضای سالیانه
θ	نرخ زوال موجودی
P	قیمت فروش هر واحد محصول
C	قیمت خرید هر واحد محصول
h	هزینه‌ی نگهداری هر واحد محصول در سال بدون در نظر داشتن نرخ سرمایه‌گذاری

i_e	نرخ بهره پرداختی توسط بانک به ازای هر واحد پولی در سال
i_k	نرخ هزینه سرمایه به ازای هر واحد پولی در سال
M	طول دوره پرداخت هزینه‌ی معوقه
α	درصدی از حجم سفارش که پرداخت معوقه‌ی آن مجاز است
W	حداقل میزان موجودی که به ازای آن پرداخت معوقه به شکل کلی مجاز است
T_w	بازه زمانی که طی آن W واحد موجودی مصرف می‌شود

متغیرهای تصمیم

T	طول دوره بازنگری سیستم موجودی (متغیر تصمیم)
Q	حجم سفارش
T_0	بازه زمانی که طی آن $(1-\alpha)Q$ واحد موجودی مصرف می‌شود
$TRC(T)$	هزینه کل سالیانه سیستم موجودی

مفروضات:

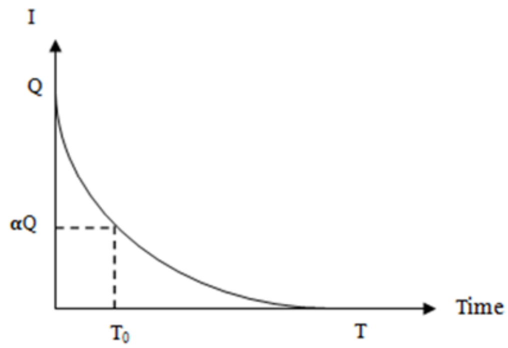
۱. بازنگری سیستم موجودی به شکل آنی و با نرخ نامحدود صورت می پذیرد.
۲. نرخ تقاضا معین بوده و کمبود مجاز نیست.
۳. سیستم موجودی تک‌محصولی است.
۴. افق زمانی برنامه‌ریزی سیستم موجودی نا محدود است.
۵. نرخ زوال موجودی ثابت است.
۶. اگر $Q \geq W$ باشد یعنی $T \geq T_w$، پرداخت معوقه به شکل کامل مجاز است؛ به این معنا که خریدار CQ واحد پولی را پس از M واحد زمانی از زمان سفارش‌دهی پرداخت می‌نماید. در غیر این صورت پرداخت معوقه به شکل جزئی مجاز است. در این شرایط هنگام سفارش‌دهی لازم است $(1-\alpha)CQ$ واحد پولی پرداخت شده و مابقی یعنی αCQ واحد پولی در پایان دوره‌ی پرداخت معوقه به تأمین‌کننده پرداخت شود.
۷. طی مدت زمانی که هزینه خرید تسویه نشده است درآمد حاصل از فروش در یک حساب سپرده با نرخ بهره دریافتی i_e سرمایه گذاری می‌شود.

همان‌گونه که در شکل (۱) مشاهده می‌شود کاهش سطح موجودی به‌طور همزمان در اثر ارضای تقاضا و نرخ زوال موجودی رخ می‌دهد. بنابراین تغییرات سطح موجودی به شکل زیر فرموله خواهد شد:

$$\frac{dI(t)}{dt} + \theta I(t) = -D \qquad 0 \leq t \leq T \qquad (۱)$$

با درنظر داشتن کران $I(T)=0$ راه حل معادله (۱) به‌صورت زیر خواهد بود:

$$I(t) = \frac{D}{\theta}\left[e^{\theta(T-t)} - 1\right] \qquad 0 \leq t \leq T \qquad (۲)$$



شکل (۱): نمایش گرافیکی سیستم موجودی

بنابراین میزان سفارش برابر با معادله (۳) است

$$Q = I(0) = \frac{D}{\theta}\left[e^{\theta T} - 1\right] \qquad (۳)$$

با توجه به رابطه (۳) مدت زمانی که طی آن W واحد موجودی در اثر ارضای تقاضا و زوال موجودی به صفر می‌رسد برابر است با:

$$T_w = \frac{1}{\theta}\ln\left(\frac{\theta w}{D} + 1\right) \qquad (۴)$$

اگر $Q \geq W$ باشد یعنی $T \geq T_w$، پرداخت معوقه به شکل کامل مجاز است؛ به این معنا که خریدار CQ واحد پولی را پس از M واحد زمانی از زمان سفارش‌دهی پرداخت می‌نماید. در غیر این صورت پرداخت معوقه به شکل جزئی مجاز است. در این شرایط هنگام سفارش‌دهی لازم است $(1-\alpha)CQ$ واحد پولی پرداخت شده و مابقی یعنی αCQ واحد پولی در پایان دوره‌ی پرداخت معوقه به تأمین‌کننده پرداخت شود.

اگر T_0 مدت زمانی باشد که طی آن $(1-\alpha)Q$ واحد موجودی در اثر ارضای تقاضا و زوال موجودی مصرف شود، با توجه به رابطه (۳) T_0 به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$T_0 = \frac{1}{\theta}\ln\left(\frac{(1-\alpha)\theta Q}{D} + 1\right) = \frac{1}{\theta}\ln\left[(1-\alpha)e^{\theta T} + \alpha\right] \qquad (۵)$$

برای محاسبه کل هزینه‌های سیستم موجودی، با توجه به موقعیت M و T_w نسبت به هم، دو حالت کلی خواهیم داشت:

حالت الف) $M \geq T_w$

حالت ب) $M < T_w$

در این بخش ابتدا به معرفی هزینه‌های مشترک سیستم موجودی پرداخته و سپس هزینه‌ی سرمایه و نرخ بهره دریافتی را برای دو حالت ذکر شده بیان خواهد شد.

۲-۱- هزینه‌های مشترک سیستم موجودی

مؤلفه‌های مشترک هزینه در سیستم موجودی عبارتند از:

هزینه‌ی سالیانه سفارش‌دهی:

$$OC = \frac{A}{T} \tag{۶}$$

هزینه سالیانه نگهداری موجودی:

$$HC = \frac{h}{T}\int_0^T I(t) = \frac{hD}{T\theta^2}\left[e^{\theta T} - \theta T - 1\right] \tag{۷}$$

هزینه سالیانه خرید:

$$PC = \frac{CQ}{T} = \frac{CD}{\theta T}\left[e^{\theta T} - 1\right] \tag{۸}$$

هزینه سالیانه زوال موجودی:

$$DC = \frac{P}{T}\int_0^T \theta I(t)dt = \frac{PD}{\theta T}\left[e^{\theta T} - \theta T - 1\right] \tag{۹}$$

در نتیجه کل هزینه‌های مشترک سیستم موجودی برابر خواهد بود با:

$$\begin{aligned} TRC^c(T) &= OC + HC + PC + DC \\ TRC^c(T) &= \frac{A}{T} + \frac{hD}{T\theta^2}\left[e^{\theta T} - \theta T - 1\right] \\ &+ \frac{CD}{\theta T}\left[e^{\theta T} - 1\right] + \frac{PD}{\theta T}\left[e^{\theta T} - \theta T - 1\right] \end{aligned} \tag{۱۰}$$

۲-۲- هزینه سرمایه و بهره دریافتی

همان‌گونه که پیشتر ذکر شد با توجه به موقعیت M و T_w دو حالت کلی خواهیم داشت:

الف) $M \geq T_w$ ب) $M < T_w$

که در این بخش به بررسی هر یک می‌پردازیم.

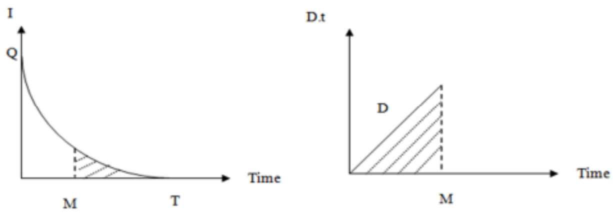
الف) $M \geq T_w$

در این حالت با توجه به فرض ۶ و ۷ سه زیر حالت ممکن تعریف می‌شوند که عبارتند از:

۱- الف) $M \leq T$

همان‌گونه که در شکل (۲) مشاهده می‌شود مجموع هزینه سرمایه‌ی قابل پرداخت و بهره دریافتی به شکل زیر خواهد بود:

$$\frac{I_k C}{T}\int_M^T I(t)dt - \frac{I_e PD}{2T}M^2 \tag{۱۱}$$



شکل (۲): هزینه سرمایه پرداختی و بهره دریافتی در حالت ۱ – الف

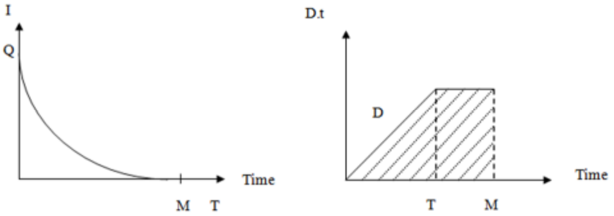
در نتیجه مجموع کل هزینه‌های سالیانه سیستم موجودی برابر است با:

$$\begin{aligned} TRC_1 &= TRC^c + \frac{i_k CD}{T\theta^2}\left[e^{\theta(T-M)} - \theta(T-M) - 1\right] \\ &- \frac{i_e PD}{2T}M^2 \end{aligned} \tag{۱۲}$$

۲- الف) $T_w \leq T \leq M$

همان‌گونه که در شکل (۳) مشاهده می‌شود مجموع هزینه سرمایه قابل پرداخت و بهره دریافتی به شکل زیر خواهد بود:

$$-\frac{i_e PDT^2}{2T} - \frac{i_e PD}{T}(M-T)T \tag{۱۳}$$



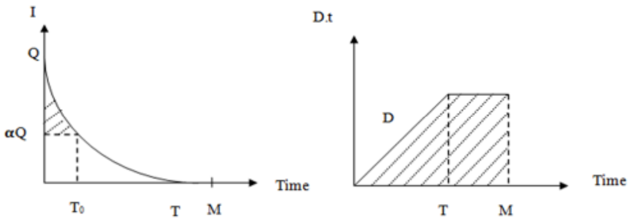
شکل (۳): هزینه سرمایه پرداختی و بهره دریافتی در حالت ۲ – الف

در نتیجه مجموع کل هزینه‌های سالیانه سیستم موجودی برابر است با:

$$TRC_2 = TRC^c - \frac{i_e PDT^2}{2T} - \frac{i_e PD}{T}(M-T)T \tag{۱۴}$$

همان‌گونه که در شکل (۴) مشاهده می‌شود مجموع هزینه سرمایه‌ی قابل پرداخت و بهره دریافتی به شکل زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} &\frac{i_k C}{T}\int_0^{T_0} I(t)dt - \frac{i_k C}{T}\alpha Q T_0 - \frac{i_e PD}{2T}T^2 \\ &- \frac{i_e PD}{T}(M-T)T \\ &= \frac{i_k CD}{\theta^2 T}\begin{Bmatrix} (1-\alpha)e^{2\theta T} + \alpha e^{\theta T} \\ -\ln\left[(1-\alpha)e^{\theta T} + \alpha\right] + 1 \end{Bmatrix} \\ &- \frac{i_k C\alpha D}{\theta^2 T}(e^{\theta T} - 1)\ln\left[(1-\alpha)e^{\theta T} + \alpha\right] \\ &- \frac{i_e PDT}{2} - i_e PD(M-T) \end{aligned} \tag{۱۵}$$



شکل (۴): هزینه سرمایه پرداختی و بهره دریافتی در حالت ۳ – الف

در نتیجه مجموع کل هزینه‌های سالیانه سیستم موجودی برابر است با:

$$TRC_3 = TRC^c + \frac{i_k CD}{\theta^2 T}\begin{Bmatrix}(1-\alpha)e^{2\theta T}+\alpha e^{\theta T}+1\\ -\ln\left[(1-\alpha)e^{\theta T}+\alpha\right]\end{Bmatrix} - \frac{i_k C\alpha D}{\theta^2 T}(e^{\theta T}-1)\ln\left[(1-\alpha)e^{\theta T}+\alpha\right] - \frac{i_e PDT}{2T} - i_e PD(M-T) \quad (۱۶)$$

بنابراین کل هزینه‌های سالیانه سیستم موجودی در حالت الف به صورت (۱۷) تعریف می‌شود

$$TRC = \begin{cases} TRC_1 & M \le T \\ TRC_2 & T_w \le T \le M \\ TRC_3 & T \le T_w \end{cases} \quad (۱۷)$$

ب) $M < T_w$

در این حالت با توجه به فرض ۶ و ۷ دو زیر حالت کلی خواهیم داشت که عبارتند از:

۱-ب) $T_w \le T$

در این حالت مجموع هزینه‌ی سرمایه قابل پرداخت و بهره دریافتی به شکل زیر خواهد بود:

$$\frac{i_k C}{T}\int_M^T I(t)dt - \frac{i_e PD}{2T}M^2 \quad (۱۸)$$

در نتیجه مجموع هزینه‌های سالیانه سیستم موجودی برابر است:

$$TRC_4 = TRC_1 = TRC^c - \frac{i_e PD}{2T}M^2 + \frac{i_k CD}{T\theta^2}\left[e^{\theta(T-M)} - \theta(T-M) - 1\right] \quad (۱۹)$$

۲-ب) $T_w > T$

این حالت با توجه به موقعیت‌های ممکن T و T_0 و M نسبت به هم به سه بخش تقسیم می‌شود که عبارتند از:

۱-۲-ب) $T_0 < T \le M$

مجموع هزینه سرمایه قابل پرداخت و بهره دریافتی به شکل زیر خواهد بود:

$$\frac{i_k C}{T}\int_0^{T_0} I(t)dt - \frac{i_k C}{T}\alpha Q T_0 - \frac{i_e PD}{2T}T^2 - \frac{i_e PD}{T}(M-T)T = \frac{i_k CD}{\theta^2 T}\begin{Bmatrix}(1-\alpha)e^{2\theta T}+\alpha e^{\theta T}\\ -\ln\left[(1-\alpha)e^{\theta T}+\alpha\right]+1\end{Bmatrix} - \frac{i_k C\alpha D}{\theta^2 T}(e^{\theta T}-1)\ln\left[(1-\alpha)e^{\theta T}+\alpha\right] - \frac{i_e PDT}{2} - i_e PD(M-T) \quad (۲۰)$$

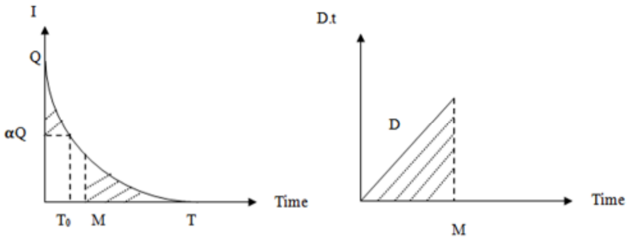
در نتیجه مجموع کل هزینه‌های سالیانه سیستم موجودی برابر است با:

$$TRC_5 = TRC_3 = TRC^c + \frac{i_k CD}{\theta^2 T}\begin{Bmatrix}(1-\alpha)e^{2\theta T}+\alpha e^{\theta T}+1\\ -\ln\left[(1-\alpha)e^{\theta T}+\alpha\right]\end{Bmatrix} - \frac{i_k C\alpha D}{\theta^2 T}(e^{\theta T}-1)\ln\begin{bmatrix}(1-\alpha)e^{\theta T}\\ +\alpha\end{bmatrix} - \frac{i_e PDT}{2} - i_e PD(M-T) \quad (۲۱)$$

۲-۲-ب) $T_0 < M \le T$

همان‌گونه که در شکل (۵) مشاهده می‌شود مجموع هزینه سرمایه قابل پرداخت و بهره دریافتی به شکل زیر خواهد بود:

$$\frac{i_k C}{T}\int_0^{T_0} I(t)dt - \frac{i_k C}{T}\alpha Q T_0 + \frac{i_k C}{T}\int_M^T I(t)dt - \frac{i_e PD}{2T}M^2 = \frac{i_k CD}{\theta^2 T}\begin{Bmatrix}(1-\alpha)e^{2\theta T}+\alpha e^{\theta T}\\ -\ln\left[(1-\alpha)e^{\theta T}+\alpha\right]+1\end{Bmatrix} - \frac{i_k C\alpha D}{\theta^2 T}(e^{\theta T}-1)\ln\left[(1-\alpha)e^{\theta T}+\alpha\right] + \frac{i_k CD}{\theta^2 T}(e^{\theta(T-M)}-\theta(T-M)-1) - \frac{i_e PDM^2}{2T} \quad (۲۲)$$



شکل(۵): هزینه سرمایه پرداختی و بهره دریافتی در حالت ۲-۲- ب

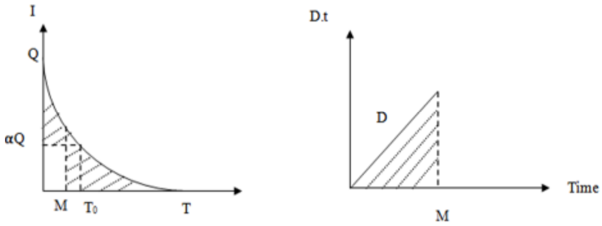
در نتیجه مجموع کل هزینه‌های سالیانه سیستم موجودی برابر است با:

$$TRC_6 = TRC^c + \frac{i_k CD}{\theta^2 T}\begin{Bmatrix}(1-\alpha)e^{2\theta T}+\alpha e^{\theta T}+1\\ -\ln\left[(1-\alpha)e^{\theta T}+\alpha\right]\end{Bmatrix} - \frac{i_k C\alpha D}{\theta^2 T}(e^{\theta T}-1)\ln\left[(1-\alpha)e^{\theta T}+\alpha\right] + \frac{i_k CD}{\theta^2 T}(e^{\theta(T-M)}-\theta(T-M)-1) - \frac{i_e PDM^2}{2T} \quad (۲۳)$$

۳-۲-ب) $M < T_0 \le T$

همان‌گونه که در شکل (۶) مشاهده می‌شود مجموع هزینه سرمایه قابل پرداخت و بهره دریافتی به شکل زیر خواهد بود:

$$\frac{i_k C}{T}\int_0^T I(t)dt-\frac{i_k C}{T}\alpha QM-\frac{i_e PD}{2T}M^2=\frac{i_k CD}{\theta^2 T}(e^{\theta T}-\theta T-1)-\frac{i_k C\alpha MD}{\theta T}(e^{\theta T}-1)-\frac{i_e PDM^2}{2T} \qquad (۲۴)$$



شکل(۶): هزینه سرمایه پرداختی و بهره دریافتی در حالت ۳-۲- ب

در نتیجه مجموع کل هزینه‌های سالیانه سیستم موجودی برابر است با:

$$TRC_7=TRC^c+\frac{i_k CD}{\theta^2 T}(e^{\theta T}-\theta T-1)-\frac{i_k C\alpha MD}{\theta T}(e^{\theta T}-1)-\frac{i_e PDM^2}{2T} \qquad (۲۵)$$

بنابراین کل هزینه‌های سالیانه سیستم موجودی در حالت ب به صورت (۲۶) تعریف می‌شود.

$$TRC=\begin{cases} TRC_1 & T_w\le T\\ TRC_3 & T_w>T\,,\ T_0<T\le M\\ TRC_6 & T_w>T\,,\ T_0<M\le T\\ TRC_7 & T_w>T\,,\ M<T_0<T\end{cases} \qquad (۲۶)$$

۳- روش حل

در این بخش طول دوه بهینه بازنگری سیستم موجودی و هزینه کل مربوطه محاسبه خواهد شد.

حالت الف) $M\ge T_w$

شرط لازم برای کمینه‌شدن $TRC_1(T)$ برابر $\frac{d\,TRC_1(T)}{dT}=0$ است بنابراین خواهیم داشت:

$$-A-\frac{(h+P\theta)D}{\theta^2}\left[e^{\theta T}-\theta T-1\right]+D\frac{(h+P\theta)T-C}{\theta^2}\left[\theta e^{\theta T}-\theta\right]+CDTe^{\theta T}+\frac{i_k CD}{\theta^2}\left[\theta Te^{\theta(T-M)}-e^{\theta(T-M)}-\theta M+1\right]+\frac{i_e PDM^2}{2}=0 \qquad (۲۷)$$

برای این‌که نشان دهیم مقدار منحصر بفرد T در بازه $[M,\infty)$ وجود دارد که $TRC_1(T)$ را کمینه می‌کند Δ_1 به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\Delta_1=-A+\frac{(h+P\theta)D}{\theta^2}\left[e^{\theta M}+\theta Me^{\theta M}-1\right]-\frac{CD}{\theta^2}\left[\theta e^{\theta M}-\theta\right]+CDMe^{\theta M}+\frac{i_e PDM^2}{2} \qquad (۲۸)$$

در نتیجه برای محاسبه T بهینه از لم ۱ به شکل زیر استفاده می‌نمائیم.

لم ۱:

الف) اگر $\Delta_1\le 0$ باشد $TRC_1(T)$ در نقطهٔ $T=T_1$ دارای مقدار کمینه است که $T_1\in[M,\infty)$ بوده و در رابطه (۲۷) صدق می‌کند.

ب) اگر $\Delta_1>0$ باشد $TRC_1(T)$ در نقطه حدی $T=M$ دارای مقدار کمینه است.

اثبات لم ۱ در پیوست ضمیمه شده است.

به‌طور مشابه شرط لازم برای کمینه‌شدن $TRC_2(T)$ برابر $\frac{d\,TRC_2(T)}{dT}=0$ است. در نتیجه داریم:

$$-A-\frac{(h+P\theta)D}{\theta^2}\left[e^{\theta T}-\theta T-1\right]+CDTe^{\theta T}+D\frac{(h+P\theta)T-C}{\theta^2}\left[\theta e^{\theta T}-\theta\right]+\frac{i_e PDT^2}{2}=0 \qquad (۲۹)$$

برای این‌که نشان دهیم مقدار منحصربفرد T در بازه $[T_w,M]$ وجود دارد که $TRC_2(T)$ را کمینه می‌کند Δ_2 به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\Delta_2=-A+\frac{(h+P\theta)D}{\theta^2}\left[e^{\theta T_w}+\theta T_w e^{\theta T_w}-1\right]-\frac{CD}{\theta^2}\left[\theta e^{\theta T_w}-\theta\right]+CDT_w e^{\theta T_w}+\frac{i_e PDT_w^2}{2} \qquad (۳۰)$$

بدیهی است که اگر $M\ge T_w$ باشد $\Delta_1\ge\Delta_2$ خواهد بود. در نتیجه لم۲ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

لم ۲:

الف) اگر $\Delta_2\le 0\le\Delta_1$ باشد $TRC_1(T)$ در نقطه $T=T_2$ دارای مقدار کمینه می‌باشد که $T_2\in[T_w,M]$ بوده و در رابطه (۲۹) صدق می‌کند.

ب) اگر $\Delta_2>0$ باشد $TRC_1(T)$ در نقطه حدی $T=T_w$ دارای مقدار کمینه می‌باشد.

ج) اگر $\Delta_1<0$ باشد $TRC_1(T)$ در نقطه حدی $T=M$ دارای مقدار کمینه می‌باشد.

اثبات لم ۲ مشابه لم ۱ است.

در نهایت شرط لازم برای کمینه شدن $TRC_3(T)$ برابر $\frac{d\,TRC_3(T)}{dT}=0$ است که در رابطه (۳۱) نمایش داده شده است.

$$-A-\frac{(h+P\theta)D}{\theta^2}\left[e^{\theta T}-\theta T-1\right] +D\frac{(h+P\theta)T-C}{\theta^2}\left[\theta e^{\theta T}-\theta\right]+CDTe^{\theta T} -\frac{i_kCD}{\theta^2}\left\{\begin{array}{l}\left[(1-\alpha)e^{2\theta T}(1-2\theta T)\right]\\ -(\ln\left[(1-\alpha)e^{\theta T}+\alpha\right]\\ \left[\alpha e^{\theta T}(1-\theta T)+1-\alpha\right])+\\ \alpha e^{\theta T}(1-\theta T)\\ +\frac{(1-\alpha)\theta e^{\theta T}T}{(1-\alpha)e^{\theta T}+\alpha}\left[\alpha e^{\theta T}-(1+\alpha)\right]\end{array}\right\} +\frac{i_ePDT^2}{2}=0 \quad (۳۱)$$

برای این‌که نشان دهیم مقدار منحصربفرد T در بازه‌ی $(0,T_w)$ وجود دارد که $TRC_3(T)$ را کمینه می کند Δ_3 مطابق رابطه (۳۲) تعریف می‌شود.

$$\Delta_3=-A+\frac{(h+P\theta)D}{\theta^2}\left[e^{\theta T_w}+\theta T_we^{\theta T_w}-1\right] -\frac{CD}{\theta^2}\left[\theta e^{\theta T_w}-\theta\right]+CDT_we^{\theta T_w}+\frac{i_ePDT_w^{\ 2}}{2} -\frac{i_kCD}{\theta^2}\left\{\begin{array}{l}\left[(1-\alpha)e^{2\theta T_w}(1-2\theta T_w)\right]\\ -(\ln\left[(1-\alpha)e^{\theta T_w}+\alpha\right]\\ \left[\alpha e^{\theta T_w}(1-\theta T_w)+1-\alpha\right])\\ +\alpha e^{\theta T_w}(1-\theta T_w)\\ +\frac{(1-\alpha)\theta e^{\theta T_w}}{(1-\alpha)e^{\theta T_w}+\alpha}\left[\begin{array}{l}\alpha T_we^{\theta T_w}\\ -(1+\alpha)T_w\end{array}\right]\end{array}\right\} \quad (۳۲)$$

لم ۳ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

لم ۳:

الف) اگر $\Delta_3\geq 0$ باشد $TRC_3(T)$ در نقطه $T=T_3$ دارای مقدار کمینه است که $T_1\in(0,T_w)$ بوده و در رابطه (۳۱) صدق می‌کند.

ب) اگر $\Delta_3<0$ باشد نقطه ای نظیر $T\in(0,T_w)$ که $TRC_3(T)$ را کمینه کند وجود ندارد.

اثبات لم ۳ مشابه لم ۱ است.

از آنجائی‌که $M\geq T_w$ است $\Delta_1\geq\Delta_2$ خواهــد بود. با ترکیب لم‌های ۳-۱ و $TRC_1(M)=TRC_2(M)$ برای به‌دست آوردن T بهینه در حالت الف قضیه ۱ به شکل زیر تعریف می‌شود.

قضیهٔ ۱: اگر $M\geq T_w$ باشد، مقدار بهینهٔ طول دوره‌ی بازنگری موجودی (T^*) به شکل جدول (۱) محاسبه می‌شود.

حالت ب) $M<T_w$

همانند حالت الف شرط لازم برای کمینه‌شدن $TRC_4(T)=TRC_1(T)$ برابر $\frac{d\,TRC_1(T)}{dT}=0$ است. برای اینکه نشان دهیم مقدار منحصربفرد T در بازه‌ی $[T_w,\infty)$ وجود دارد که $TRC_1(T)$ را کمینه می‌کند Δ_4 به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\Delta_4=-A-\frac{(h+P\theta)D}{\theta^2}\left[e^{\theta T_w}-\theta T_we^{\theta T_w}-1\right] -\frac{CD}{\theta^2}\left[\theta e^{\theta T_w}-\theta\right]+CDT_we^{\theta T_w}+\frac{i_ePDM^2}{2} +\frac{i_kCD}{\theta^2}\left[\theta T_we^{\theta(T_w-M)}-e^{\theta(T_w-M)}-\theta M+1\right] \quad (۳۳)$$

لم ۴:

الف) اگر $\Delta_4\leq 0$ باشد $TRC_1(T)$ در نقطه $T=T_4$ دارای مقدار کمینه است که $T_4\in[T_w,\infty)$ بوده و در رابطه (۲۷) صدق می‌کند.

ب) اگر $\Delta_4>0$ باشد $TRC_1(T)$ در نقطه حدی $T=T_w$ دارای مقدار کمینه می‌باشد.

اثبات لم ۴ مشابه لم ۱ است.

به‌طور مشابه شرط لازم برای کمینه شدن $TRC_5(T)=TRC_3(T)$ برابر $\frac{d\,TRC_3(T)}{dT}=0$ می‌باشد. برای اینکه نشان دهیم مقدار منحصربفرد T در بازه‌ی $(0,M]$ وجود دارد که $TRC_3(T)$ را کمینه می‌کند طبق رابطه‌ی (۳۴) Δ_5 به شکل رابطه (۳۴) تعریف می‌شود.

$$\Delta_5=-A-\frac{(h+P\theta)D}{\theta^2}\left[e^{\theta M}-\theta Me^{\theta M}-1\right] -\frac{CD}{\theta^2}\left[\theta e^{\theta M}-\theta\right]+CDMe^{\theta M}+\frac{i_ePDM^2}{2} -\frac{i_kCD}{\theta^2}\left\{\begin{array}{l}\left[(1-\alpha)e^{2\theta M}(1-2\theta M)\right]\\ -(\ln\left[(1-\alpha)e^{\theta M}+\alpha\right]\\ \left[\alpha e^{\theta M}(1-\theta M)+1-\alpha\right])\\ +\alpha e^{\theta M}(1-\theta M)+\\ \frac{(1-\alpha)\theta e^{\theta M}}{(1-\alpha)e^{\theta M}+\alpha}\left[\begin{array}{l}\alpha Me^{\theta M}\\ -(1+\alpha)M\end{array}\right]\end{array}\right\} \quad (۳۴)$$

در نتیجه لم ۵ به شکل زیر تعریف می‌شود:

لم ۵:

الف) اگر $\Delta_5\geq 0$ باشد $TRC_3(T)$ در نقطهٔ $T=T_5$ دارای مقدار کمینه است که $T_5\in(0,M]$ بوده و در رابطه (۳۱) صدق می‌کند.

جدول (۱): مقدار بهینه طول دوره بازنگری موجودی (قضیه ۱)

T^*	$TRC(T^*)$	وضعیت
T_1	$TRC_1(T_1)$	$\Delta_1 \le 0, \Delta_3 < 0$
T_1 یا T_3	$Min\{TRC_1(T_1), TRC_3(T_3)\}$	$\Delta_1 \le 0, \Delta_3 \ge 0$
T_2 یا T_3	$Min\{TRC_2(T_2), TRC_3(T_3)\}$	$\Delta_1 > 0, \Delta_2 \le 0, \Delta_3 \ge 0$
T_2	$TRC_2(T_2)$	$\Delta_1 > 0, \Delta_2 \le 0, \Delta_3 < 0$
T_w یا T_3	$Min\{TRC_2(T_w), TRC_3(T_3)\}$	$\Delta_2 > 0, \Delta_3 \ge 0$
T_w	$TRC_2(T_w)$	$\Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0$

ب) اگر $\Delta_5 > 0$ باشد $TRC_3(T)$ در نقطه‌ی حدی $T = M$ دارای مقدار کمینه است.

اثبات لم ۵ مشابه لم ۱ است.

شرط لازم برای کمینه‌شدن $TRC_6(T)$ برابر $\frac{d\,TRC_6(T)}{dT} = 0$ است. بنابراین رابطه (۳۵) نتیجه می‌شود.

$$\begin{aligned}
&-A-\frac{(h+P\theta)D}{\theta^2}\left[e^{\theta T}-\theta T-1\right]+CDTe^{\theta T}\\
&+D\frac{(h+P\theta)T-C}{\theta^2}\left[\theta e^{\theta T}-\theta\right]+\frac{i_e PDM^2}{2}\\
&-\frac{i_k CD}{\theta^2}\left\{\begin{array}{l}\left[(1-\alpha)e^{2\theta T}(1-2\theta T)\right]\\ -(\ln\left[(1-\alpha)e^{\theta T}+\alpha\right]\\ \left[\alpha e^{\theta T}(1-\theta T)+1-\alpha\right])\\ +\alpha e^{\theta T}(1-\theta T)\\ +\frac{(1-\alpha)\theta e^{\theta T}}{(1-\alpha)e^{\theta T}+\alpha}\begin{bmatrix}\alpha Te^{\theta T}\\ -(1+\alpha)T\end{bmatrix}\\ +e^{\theta(T-M)}(1-\theta T)+\theta M-1\end{array}\right\}=0
\end{aligned} \tag{۳۵}$$

برای این‌که نشان دهیم مقدار منحصربفرد T در بازه $[M, T_w]$ وجود دارد که $TRC_6(T)$ را کمینه می‌کند Δ_6 به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}
\Delta_6 = &-A-\frac{(h+P\theta)D}{\theta^2}\left[e^{\theta T_w}-\theta T_w e^{\theta T_w}-1\right]\\
&-\frac{CD}{\theta^2}\left[\theta e^{\theta T_w}-\theta\right]+CDT_w e^{\theta T_w}+\frac{i_e PDM^2}{2}\\
&-\frac{i_k CD}{\theta^2}\left\{\begin{array}{l}\left[(1-\alpha)e^{2\theta T_w}(1-2\theta T_w)\right]\\ -(\ln\left[(1-\alpha)e^{\theta T_w}+\alpha\right]\\ \left[\alpha e^{\theta T_w}(1-\theta T_w)+1-\alpha\right])\\ +\alpha e^{\theta T_w}(1-\theta T_w)\\ +\frac{(1-\alpha)\theta e^{\theta T_w}}{(1-\alpha)e^{\theta T_w}+\alpha}\begin{bmatrix}\alpha T_w e^{\theta T_w}\\ -(1+\alpha)T_w\end{bmatrix}\\ +e^{\theta(T_w-M)}(1-\theta T_w)+\theta M-1\end{array}\right\}
\end{aligned} \tag{۳۶}$$

بدیهی است که اگر $M < T_w$ باشد $\Delta_5 < \Delta_6$ خواهد بود. در نتیجه لم ۶ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

لم ۶:

الف) اگر $\Delta_5 \le 0 \le \Delta_6$ باشد $TRC_6(T)$ در نقطه $T = T_6$ دارای مقدار کمینه است که $T_6 \in [M, T_w)$ بوده و در رابطه (۳۵) صدق می‌کند.

ب) اگر $\Delta_5 > 0$ باشد $TRC_6(T)$ در نقطه‌ی حدی $T = M$ دارای مقدار کمینه است.

ج) اگر $\Delta_6 < 0$ باشد نقطه‌ای نظیر $T \in [M, T_w)$ که $TRC_6(T)$ را کمینه کند وجود ندارد.

اثبات لم ۶ مشابه لم ۱ است.

در نهایت شرط لازم برای کمینه‌شدن $TRC_7(T)$ برابر $\frac{d\,TRC_7(T)}{dT} = 0$ است. در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned}
&-A-\frac{(h+P\theta)D}{\theta^2}\left[e^{\theta T}-\theta T-1\right]\\
&+D\frac{(h+P\theta)T-C}{\theta^2}\left[\theta e^{\theta T}-\theta\right]+CDTe^{\theta T}\\
&-\frac{i_k CD}{\theta^2}\left[e^{\theta T}(\alpha\theta+1-\theta T)-\alpha\theta(e^{\theta T}-1)-1\right]\\
&+\frac{i_e PDM^2}{2}=0
\end{aligned} \tag{۳۷}$$

برای این‌که نشان دهیم مقدار منحصربفرد T در بازه‌ی $[M, T_w]$ وجود دارد که $TRC_7(T)$ را کمینه می‌کند Δ_7 به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}
\Delta_7 = &-A-\frac{(h+P\theta)D}{\theta^2}\left[e^{\theta M}-\theta Me^{\theta M}-1\right]\\
&-\frac{CD}{\theta^2}\left[\theta e^{\theta M}-\theta\right]+CDMe^{\theta M}+\frac{i_e PDM^2}{2}\\
&-\frac{i_k CD}{\theta^2}\left[e^{\theta M}(\alpha\theta+1-\theta M)-\alpha\theta(e^{\theta M}-1)-1\right]
\end{aligned} \tag{۳۸}$$

$$\Delta_8 = -A - \frac{(h+P\theta)D}{\theta^2}\left[e^{\theta T_w} - \theta T_w e^{\theta T_w} - 1\right] - \frac{CD}{\theta^2}\left[\theta e^{\theta T_w} - \theta\right] + CDT_w e^{\theta T_w} + \frac{i_e PDM^2}{2} - \frac{i_k CD}{\theta^2}\left[e^{\theta T_w}(\alpha\theta + 1 - \theta T_w) - \alpha\theta(e^{\theta T_w} - 1) - 1\right] \quad (۳۹)$$

بدیهی است که اگر $M < T_w$ باشد $\Delta_5 < \Delta_6$ خواهد بود. در نتیجه لم ۷ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

لم ۷:

الف) اگر $\Delta_7 \le 0 \le \Delta_8$ باشد $TRC_7(T)$ در نقطه $T = T_7$ دارای مقدار کمینه می‌باشد که $T_7 \in (M, T_w)$ بوده و در رابطه (۳۷) صدق می‌کند.

ب) اگر $\Delta_7 > 0$ باشد نقطه‌ای نظیر $T \in [M, T_w)$ که $TRC_7(T)$ را کمینه کند وجود ندارد.

ج) اگر $\Delta_8 < 0$ باشد نقطه‌ای نظیر $T \in [M, T_w)$ که $TRC_7(T)$ را کمینه کند وجود ندارد.

اثبات لم ۷ مشابه لم ۱ است.

از آنجائی‌که $M < T_w$ است $\Delta_5 < \Delta_6$ و $\Delta_8 < \Delta_7$ خواهد بود. با ترکیب لم‌های ۷-۴ و $TRC_3(M) = TRC_6(M)$ برای به‌دست آوردن T بهینه در حالت ب قضیه ۲ به شکل زیر تعریف می‌شود.

قضیهٔ ۲: اگر $M < T_w$ باشد، مقدار بهینه طول دوره بازنگری موجودی (T^*) به شکل جدول (۲) محاسبه می‌شود.

جدول (۲) : مقدار بهینه طول دوره بازنگری موجودی (قضیه ۲)

وضعیت	$TRC(T^*)$	T^*
$\Delta_4 \le 0, \Delta_5 \ge 0, \Delta_7 \le 0, \Delta_8 \ge 0$	$Min\{TRC_4(T_4), TRC_5(T_5), TRC_7(T_7)\}$	T_4 یا T_5 یا T_7
$\Delta_4 \le 0, \Delta_5 \ge 0, \Delta_7 > 0$	$Min\{TRC_4(T_4), TRC_5(T_5)\}$	T_4 یا T_5
$\Delta_4 \le 0, \Delta_5 \ge 0, \Delta_8 < 0$	$Min\{TRC_4(T_4), TRC_5(T_5)\}$	T_4 یا T_5
$\Delta_4 \le 0, \Delta_5 < 0, \Delta_6 \ge 0, \Delta_7 \le 0, \Delta_8 \ge 0$	$Min\{TRC_4(T_4), TRC_6(T_6), TRC_7(T_7)\}$	T_4 یا T_6 یا T_7
$\Delta_4 \le 0, \Delta_5 < 0, \Delta_6 \ge 0, \Delta_7 > 0$	$Min\{TRC_4(T_4), TRC_6(T_6)\}$	T_4 یا T_6
$\Delta_4 \le 0, \Delta_5 < 0, \Delta_6 \ge 0, \Delta_8 < 0$	$Min\{TRC_4(T_4), TRC_6(T_6)\}$	T_4 یا T_6
$\Delta_4 \le 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 \le 0, \Delta_8 \ge 0$	$Min\{TRC_4(T_4), TRC_7(T_7)\}$	T_4 یا T_7
$\Delta_4 \le 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 > 0$	$TRC_4(T_4)$	T_4
$\Delta_4 \le 0, \Delta_6 < 0, \Delta_8 < 0$	$TRC_4(T_4)$	T_4
$\Delta_4 > 0, \Delta_5 \ge 0, \Delta_7 \le 0, \Delta_8 \ge 0$	$Min\{TRC_4(T_w), TRC_5(T_5), TRC_7(T_7)\}$	T_w یا T_5 یا T_7
$\Delta_4 > 0, \Delta_5 \ge 0, \Delta_7 > 0$	$Min\{TRC_4(T_w), TRC_5(T_5)\}$	T_w یا T_5
$\Delta_4 > 0, \Delta_5 \ge 0, \Delta_8 < 0$	$Min\{TRC_4(T_w), TRC_5(T_5)\}$	T_w یا T_5
$\Delta_4 > 0, \Delta_5 < 0, \Delta_6 \ge 0, \Delta_7 \le 0, \Delta_8 \ge 0$	$Min\{TRC_4(T_w), TRC_6(T_6), TRC_7(T_7)\}$	T_w یا T_6 یا T_7
$\Delta_4 > 0, \Delta_5 < 0, \Delta_6 \ge 0, \Delta_7 > 0$	$Min\{TRC_4(T_w), TRC_6(T_6)\}$	T_w یا T_6
$\Delta_4 > 0, \Delta_5 < 0, \Delta_6 \ge 0, \Delta_8 < 0$	$Min\{TRC_4(T_w), TRC_6(T_6)\}$	T_w یا T_6
$\Delta_4 > 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 \le 0, \Delta_8 \ge 0$	$Min\{TRC_4(T_w), TRC_7(T_7)\}$	T_w یا T_7
$\Delta_4 > 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 > 0$	$TRC_4(T_w)$	T_w
$\Delta_4 > 0, \Delta_6 < 0, \Delta_8 < 0$	$TRC_4(T_w)$	T_w

با توجه به بازه‌های ممکن در محاسبه $TRC_6(T)$ و $TRC_7(T)$ که در بخش مدلسازی ریاضی ارائه گردید:

- پس از محاسبه T_0 با استفاده از T_6، در صورتی‌که $M > T_0$ نباشد، T_6 از محاسبات حذف شده و هزینه متناظر با آن در محاسبه هزینه‌ی بهینه مدنظر قرار نمی‌گیرد.

- پس از محاسبه T_0 با استفاده از T_7، در صورتی‌که $M < T_0$ نباشد، T_7 از محاسبات حذف شده و هزینه متناظر با آن در محاسبه هزینه بهینه مدنظر قرار نمی‌گیرد.

با استفاده از قضیه ۱و۲ الگوریتم حل مسئله موجودی حاضر به شکل زیر تعریف می‌شود.

الگوریتم حل:

گام ۱- مقادیر T_w و M را مقایسه کنید. اگر $M \geq T_w$ باشد به گام ۲ و در غیر این صورت به گام ۴ بروید.

گام ۲- با استفاده از معادلات (۲۸) و (۳۰) و (۳۲) مقادیر Δ_1 و Δ_2 و Δ_3 را محاسبه نمائید؛ براساس قضیه ۱، T^* و $TRC(T^*)$ را محاسبه کرده و به گام ۴ بروید.

گام ۳- با استفاده از معادلات (۳۳) و (۳۴) و (۳۶) و (۳۸) و (۳۹) مقادیر Δ_4 و Δ_5 و Δ_6 و Δ_7 و Δ_8 را محاسبه نمائید؛ براساس قضیه ۲، T^* و $TRC(T^*)$ را محاسبه کرده و به گام ۴ بروید.

گام ۴- پایان.

۴- نتایج عددی

در این بخش برای نمایش نتایج محاسباتی، مسئله مورد استفاده در پژوهش [۲۲] مورد استفاده قرار گرفته است. با این تفاوت که $P =$ ۵۰ و نرخ زوال (۰.۱۵، ۰.۱، ۰.۰۵) $= \theta$ است. با استفاده از پارامترهای $A =$ ۵۰ دلار بر سفارش، $D =$ ۱۰۰۰ واحد در سال، $h =$ ۵ دلار بر واحد بر سال، $i_k =$ ۰.۱ دلار بر سال، $i_e =$ ۰.۰۷ دلار بر سال، $M =$ ۰.۲۵ سال، (۱۰۰،۲۰۰،۳۰۰) $= W$ ، (۰.۲، ۰.۵، ۰.۸) $= \alpha$ و (۱۰،۲۰،۳۰) $= C$ نتایج محاسباتی به شکل جداول (۳)، (۴) و(۵) است.

براساس نتایج عددی نمایش داده شده در جدول (۳)، موارد زیر قابل نتیجه‌گیری است:

۱. اگر میزان سفارش از اندازه W کمتر باشد در سطح ثابت W و C و θ، با افزایش α ، حجم سفارش (Q) و طول دوره بازنگری موجودی (T) افزایش و هزینه‌ی کل سیستم (TRC) کاهش می‌یابد. درصورتی‌که حجم سفارش بیشتر از W باشد تغییرات α تأثیری روی مقادیر Q و T و TRC نخواهد داشت.

۲. در سطح ثابت α و C و θ، با افزایش w، حجم سفارش (Q) و طول دوره بازنگری موجودی (T) کاهش و هزینه کل سیستم (TRC) افزایش می‌یابد. به‌عبارت دیگر در این حالت فروشنده به جای استفاده از امکان پرداخت معوقه از شکل جزئی آن استفاده می‌کند.

۳. در سطح ثابت α و W و θ، با افزایش هزینه خرید C ، حجم سفارش (Q) و طول دوره بازنگری موجودی (T) کاهش و هزینه‌ی کل سیستم (TRC) افزایش می‌یابد.

۴. در سطح ثابت α و W و C، با افزایش نرخ زوال موجودی θ، حجم سفارش (Q) و طول دوره بازنگری موجودی (T) کاهش و هزینه‌ی کل سیستم (TRC) افزایش می‌یابد.

جدول (۳) : نتایج عددی حاصل از مقادیر مختلف پارامتر ها به ازای $\theta = 0.05$

α	W	C	T^*	Q^*	$TRC^*(T^*)$
۰.۲	۱۰۰	۱۰	$T_1 =$ ۰.۲۶۹۱	۲۷۸.۷۰۷	۹۸۰۵.۲۱
		۲۰	$T_2 =$ ۰.۲۵۹۴	۲۷۱.۰۹۶	۱۱۶۰۷.۴۲
		۳۰	$T_2 =$ ۰.۲۵۲۱	۲۶۴.۹۶۲	۱۳۷۷.۶۷۱
	۲۰۰	۱۰	$T_2 =$ ۰.۲۳۹۹	۲۴۰.۰۹۱	۱۶۰۴۳.۱۷
		۲۰	$T_2 =$ ۰.۲۲۹۴	۲۳۱.۷۱۳	۱۷۰۱۱.۱۲
		۳۰	$T_1 =$ ۰.۲۱۷۶	۲۲۳.۰۸۷	۱۷۸۰۹.۷۹
	۳۰۰	۱۰	$T_3 =$ ۰.۲۰۴۷	۲۱۵.۸۶۸	۱۹۰۵۴.۹۹
		۲۰	$T_3 =$ ۰.۲۰۲۶	۲۰۵.۱۳۲	۲۰۰۵۱.۸۸
		۳۰	$T_5 =$ ۰.۱۶۲۱	۱۹۶.۱۰۴	۲۱۰۵۸.۳۷۸
۰.۵	۱۰۰	۱۰	$T_1 =$ ۰.۲۶۹۱	۲۷۸.۷۰۷	۹۸۰۵.۲۱۱
		۲۰	$T_2 =$ ۰.۲۵۹۴	۲۷۱.۰۹۶	۱۱۶۰۷.۴۲
		۳۰	$T_2 =$ ۰.۲۵۲۱	۲۶۴.۹۶۲	۱۳۷۷۷.۶۷
	۲۰۰	۱۰	$T_2 =$ ۰.۲۳۹۹	۲۴۰.۰۹۱	۱۶۰۴۳.۱۷
		۲۰	$T_2 =$ ۰.۲۲۹۴	۲۳۱.۷۱۳	۱۷۰۱۱.۱۲
		۳۰	$T_2 =$ ۰.۲۱۷۶	۲۲۳.۰۸۷	۱۷۰۳۷.۳۲
	۳۰۰	۱۰	$T_5 =$ ۰.۱۸۴۵	۲۲۳.۴۵۴	۱۷۳۳۱.۰۷
		۲۰	$T_5 =$ ۰.۱۷۹۶	۲۱۷.۴۶۶	۱۸۲۹۳.۸۹
		۳۰	$T_5 =$ ۰.۲۰۳۱	۲۰۵.۴۹۸	۱۹۵۳۲.۵۸
۰.۸	۱۰۰	۱۰	$T_1 =$ ۰.۲۶۹۱	۲۷۸.۷۰۷	۹۸۰۵.۲۱
		۲۰	$T_2 =$ ۰.۲۵۹۴	۲۷۱.۰۹۶۸	۱۱۶۰۷.۴۲
		۳۰	$T_2 =$ ۰.۲۵۲۱	۲۶۴.۹۶۲	۱۳۷۷۷.۶۷
	۲۰۰	۱۰	$T_2 =$ ۰.۲۳۹۹	۲۴۰.۰۹۱	۱۶۰۴۳.۱۷
		۲۰	$T_2 =$ ۰.۲۲۹۴	۲۳۱.۷۱۳	۱۷۰۱۱.۱۲
		۳۰	$T_2 =$ ۰.۲۱۷۶	۲۲۳.۰۸۷	۱۷۰۳۷.۳۲
	۳۰۰	۱۰	$T_5 =$ ۰.۲۲۹۹	۲۳۲.۷۴۸	۱۷۱۱۱.۷۹
		۲۰	$T_5 =$ ۰.۲۰۹۴	۲۲۹.۴۴۶	۱۷۲۰۴.۶۲۵
		۳۰	$T_5 =$ ۰.۱۹۹۷	۲۱۸.۸۱۱	۱۷۸۲۷.۶۲۹

۵- نتیجه‌گیری

در این پژوهش مطالعه چانگ و همکاران [۴] با در نظر داشتن زوال موجودی توسعه داده شده است. فرض بر این است که پرداخت معوقه وابسته به حجم سفارش بوده و در شرایطی که این میزان از حجم معینی کمتر باشد پرداخت معوقه به شکل جزئی و در غیر این صورت به شکل کلی مجاز خواهد بود. برای تعیین پاسخ بهینه و منحصربفرد لم‌ها و قضایای متعددی تعریف شده که در ایجاد الگوریتم حل ارائه شده به‌کار بسته شده است. در پایان برای نمایش اعتبار مدل ارائه شده و کارائی روش حل مورد استفاده به ارائه تعدادی مسئله نمونه و تحلیل نتایج حاصل پرداخته‌ایم. مدل ارائه شده از جنبه‌های متعددی

قابل توسعه است که از این میان می‌توان به مدل‌سازی پرداخت معوقه به شکل دو سطحی، در نظر داشتن سایر حالت‌های نرخ زوال از جمله نمائی و وایبول، امکان کمبود در سیستم و مدلسازی تابع تقاضا به صورت وابسته به زمان و یا قیمت اشاره کرد.

جدول (۴): نتایج عددی حاصل از مقادیر مختلف پارامترها به ازای $\theta = 0.1$

α	W	C	T^*	Q^*	$TRC^*(T^*)$
		۱۰	$T_2 =$ ۰.۲۲۹۶	۲۳۲.۲۵۶	۱۱۰۱۷.۰۹
	۱۰۰	۲۰	$T_2 =$ ۰.۲۲۳۴	۲۲۵.۹۱۴	۱۳۰۴۲.۰۵۱
		۳۰	$T_2 =$ ۰.۲۱۸۴	۲۲۰.۸۰۲	۱۵۰۳۱.۰۹
		۱۰	$T_3 =$ ۰.۲۰۹۹	۲۱۰.۰۲۱	۱۸۰۲۶.۰۴۳
۰.۲	۲۰۰	۲۰	$T_3 =$ ۰.۲۰۱۸	۲۰۲.۷۸۱	۱۹۰۲۱.۱۲۳
		۳۰	$T_5 =$ ۰.۱۸۴۲	۱۸۵.۹۰۶	۲۰۰۱۱.۰۰۵
		۱۰	$T_3 =$ ۰.۱۷۸۳	۱۷۹.۸۹	۲۱۴۱۰.۱۰۲
	۳۰۰	۲۰	$T_3 =$ ۰.۱۶۹۵	۱۷۰.۹۴۴	۲۲۵۳۰.۲۰۴
		۳۰	$T_5 =$ ۰.۱۶۲۱	۱۶۳.۴۲	۲۳۶۶۱.۰۹۹
		۱۰	$T_2 =$ ۰.۲۲۹۶	۲۳۲.۲۵۶	۱۱۰۱۷.۰۹
	۱۰۰	۲۰	$T_2 =$ ۰.۲۲۳۴	۲۲۵.۹۱۴	۱۳۰۴۲.۰۵۱
		۳۰	$T_2 =$ ۰.۲۱۸۴	۲۲۰.۸۰۲	۱۵۰۳۱.۰۹
		۱۰	$T_3 =$ ۰.۲۰۹۹	۲۱۰.۰۲۱	۱۸۰۲۶.۰۴۳
۰.۵	۲۰۰	۲۰	$T_3 =$ ۰.۲۰۱۸	۲۰۲.۷۸۱	۱۹۰۲۱.۱۲۳
		۳۰	$T_3 =$ ۰.۱۹۴۲	۱۹۶.۰۹۷	۱۹۱۴۳.۰۶۶
		۱۰	$T_5 =$ ۰.۱۸۴۵	۱۸۶.۲۱۲	۱۹۴۷۳.۱۱۷
	۳۰۰	۲۰	$T_5 =$ ۰.۱۷۹۶	۱۸۱.۲۲۲	۲۰۵۵۴.۹۴۳
		۳۰	$T_5 =$ ۰.۱۶۹۸	۱۷۱.۲۴۹	۲۱۹۴۶.۷۲۳
		۱۰	$T_2 =$ ۰.۲۲۹۶	۲۳۲.۲۵۶	۱۱۰۱۷.۰۹
	۱۰۰	۲۰	$T_2 =$ ۰.۲۲۳۴	۲۲۵.۹۱۴	۱۳۰۴۲.۰۵۱
		۳۰	$T_2 =$ ۰.۲۱۸۴	۲۲۰.۸۰۲	۱۵۰۳۱.۰۹
		۱۰	$T_3 =$ ۰.۲۰۹۹	۲۱۰.۰۲۱	۱۸۰۲۶.۰۴۳
۰.۸	۲۰۰	۲۰	$T_3 =$ ۰.۲۰۱۸	۲۰۲.۷۸۱	۱۹۰۲۱.۱۲۳
		۳۰	$T_3 =$ ۰.۱۹۷۱	۱۹۹.۰۵۵	۱۹۰۵۰.۱۲۲
		۱۰	$T_5 =$ ۰.۱۹۲۱	۱۹۳.۹۵۷	۱۹۲۲۶.۷۳۱
	۳۰۰	۲۰	$T_5 =$ ۰.۱۸۹۴	۱۹۱.۲۰۵	۱۹۳۳۱.۰۴۰
		۳۰	$T_5 =$ ۰.۱۸۰۷	۱۸۲.۳۴۲	۲۰۰۳۱.۰۴۴

مراجع

[1] Lou, K. R., Wang, L. (2013). Optimal lot-sizing policy for a manufacturer with defective items in a supply chain with up-stream and down-stream trade credits. Computers & Industrial Engineering, 66, 4, 1125-1130.

[2] Chang, C. T., Teng, J. T., Goyal, S. K. (2008). Inventory lot-size models under trade credits: a review. Asia-Pacific Journal of Operational Research, 25, 01, 89-112.

جدول (۵): نتایج عددی حاصل از مقادیر مختلف پارامترها به ازای $\theta = 0.15$

α	W	C	T^*	Q^*	$TRC^*(T^*)$
		۱۰	$T_1 =$ ۰.۱۸۶۲	۱۹۰.۴۴۹	۱۲۱۱۸.۷۹
	۱۰۰	۲۰	$T_2 =$ ۰.۱۷۸۶	۱۸۵.۲۴۹۵	۱۴۳۴۶.۲۵
		۳۰	$T_2 =$ ۰.۱۷۴۲	۱۸۱.۰۵۷	۱۶۵۳۴.۱۹
		۱۰	$T_3 =$ ۰.۱۶۵۷	۱۷۲.۲۲۳	۱۹۸۲۸.۶۴
۰.۲	۲۰۰	۲۰	$T_3 =$ ۰.۱۵۸۹	۱۶۴.۰۱۲	۲۰۹۲۳.۲۳
		۳۰	$T_5 =$ ۰.۱۴۷۹	۱۵۲.۴۴۲	۲۲۰۱۲.۱۱
		۱۰	$T_3 =$ ۰.۱۳۷۱	۱۴۷.۵۰۹	۲۳۵۵۱.۱۱
	۳۰۰	۲۰	$T_3 =$ ۰.۱۳۴۶	۱۴۰.۱۷۴	۲۴۷۸۳.۲۲
		۳۰	$T_5 =$ ۰.۱۲۸۶	۱۳۴.۰۰۴	۲۶۰۲۷.۲۱
		۱۰	$T_1 =$ ۰.۱۸۶۲	۱۹۰.۴۴۹	۱۲۱۱۸.۷۹۹
	۱۰۰	۲۰	$T_2 =$ ۰.۱۷۸۶	۱۸۵.۲۴۹	۱۴۳۴۶.۲۵
		۳۰	$T_2 =$ ۰.۱۷۴۲	۱۸۱.۰۵۷	۱۶۵۳۴.۱۹۹
		۱۰	$T_3 =$ ۰.۱۶۸۸	۱۷۶.۴۴۱	۱۹۰۵۳.۳۴
۰.۵	۲۰۰	۲۰	$T_3 =$ ۰.۱۵۷۳	۱۶۸.۱۱۲	۲۰۳۲۰.۴۲
		۳۰	$T_3 =$ ۰.۱۵۴۲	۱۶۰.۷۹۹	۲۱۰۵۷.۳۷
		۱۰	$T_5 =$ ۰.۱۴۸۲	۱۵۲.۶۹۳	۲۱۴۲۰.۴۳
	۳۰۰	۲۰	$T_5 =$ ۰.۱۳۸۵	۱۴۸.۶۰۲	۲۲۶۱۰.۴۴
		۳۰	$T_5 =$ ۰.۱۳۰۲	۱۴۰.۴۲۴	۲۴۱۴۱.۳۹
		۱۰	$T_1 =$ ۰.۱۸۶۲	۱۹۰.۴۴۹	۱۲۱۱۸.۷۹
	۱۰۰	۲۰	$T_2 =$ ۰.۱۷۸۶	۱۸۵.۲۴۹	۱۴۳۴۶.۲۵
		۳۰	$T_2 =$ ۰.۱۷۴۲	۱۸۱.۰۵۷	۱۶۵۳۴.۲۰
		۱۰	$T_3 =$ ۰.۱۷۰۱	۱۷۹.۰۵۶	۱۸۲۰۴.۰۲
۰.۸	۲۰۰	۲۰	$T_5 =$ ۰.۱۶۳۲	۱۷۱.۳۳۸	۱۹۴۷۳.۲۸
		۳۰	$T_5 =$ ۰.۱۸۶۴	۱۶۳.۲۲۵	۲۰۹۵۵.۱۳
		۱۰	$T_5 =$ ۰.۱۵۰۱	۱۵۹.۰۴۴	۲۱۱۴۹.۴۱
	۳۰۰	۲۰	$T_5 =$ ۰.۱۴۹۷	۱۵۶.۷۸۸	۲۱۲۶۴.۱۴
		۳۰	$T_5 =$ ۰.۱۴۰۳	۱۴۹.۵۲۱	۲۲۰۳۴.۱۴

[3] Begum, R., Sahoo, R. R., Sahu, S. K. (2012). A replenishment policy for items with price-dependent demand, time-proportional deterioration and no shortages. International Journal of Systems Science, 43, 5, 903-910.

[4] Chung, K. J., Lin, S. D., Srivastava, H. M. (2013). The inventory models under conditional trade credit in a supply chain system. Applied Mathematical Modelling, 37, 24, 10036-10052.

[5] Seifert, D., Seifert, R. W., Protopappa-Sieke, M. (2013). A review of trade credit literature: Opportunities for research in operations. European Journal of Operational

Research, 231, 2, 245–256.

[6] Seifert, D., Seifert, R. W., Protopappa-Sieke, M. (2013). A review of trade credit literature: Opportunities for research in operations. European Journal of Operational Research, 231, 2, 245–256.

[7] Haley, C. W., Higgins, R. C. (1973). Inventory policy and trade credit financing. Management Science, 20, 4-Part-I, 464-471.

[8] Kingsman, B. G. (1983). The effect of payment rules on ordering and stockholding in purchasing. Journal of the Operational Research society, 34, 11, 1085-1098.

[9] Chapman, C. B., Ward, S. C., Cooper, D. F., & Page, M. J. (1984). Credit policy and inventory control. Journal of the Operational Research Society, 35, 12, 1055-1065.

[10] Goyal, S. K. (1985). Economic order quantity under conditions of permissible delay in payments. Journal of the Operational Research Society, 36, 4, 335-338.

[11] Ventura, E., Williams, T., Smith, V. L., Machol, R. E., & Goyal, S. K. (1985). Letters and viewpoints. The Journal of the Operational Research Society, 36, 10, 965-967.

[12] Teng, J. T. (2002). On the economic order quantity under conditions of permissible delay in payments. Journal of the Operational Research Society, 53, 8, 915-918.

[13] Dave, U. (1985). Letters and viewpoints on Economic order quantity under conditions of permissible delay in payments. Journal of the Operational Research Society, 36, 11, 1069–1070.

[14] Liao, H. C., Tsai, C. H., Su, C. T. (2000). An inventory model with deteriorating items under inflation when a delay in payment is permissible. International Journal of Production Economics, 63, 2, 207-214.

[15] Jaggi, C. K., Aggarwal, K. K., Goel, S. K. (2007). Retailer’s optimal ordering policy under two stage trade credit financing. Advanced modeling and optimization, 9, 1, 67-80.

[16] Huang, Y. F., Hsu, K. H. (2008). An EOQ model under retailer partial trade credit policy in supply chain. International Journal of Production Economics, 112, 2, 655-664.

[17] Soni, H., Shah, N. H. (2008). Optimal ordering policy for stock-dependent demand under progressive payment scheme. European Journal of Operational Research, 184, 1, 91-100.

[18] Chen, L. H., & Kang, F. S. (2010). Integrated inventory models considering the two-level trade credit policy and a price-negotiation scheme. European Journal of Operational Research, 205, 1, 47-58.

[19] Khouja, M., Mehrez, A. (1996). Optimal inventory policy under different supplier credit policies. Journal of manufacturing Systems, 15, 5, 334-339.

[20] Shinn, S. W., Hwang, H. (2003). Optimal pricing and ordering policies for retailers under order-size-dependent delay in payments. Computers & Operations Research, 30, 1, 35-50.

[21] Ouyang, L. Y., Ho, C. H., Su, C. H. (2008). Optimal strategy for an integrated system with variable production rate when the freight rate and trade credit are both linked to the order quantity. International Journal of Production Economics, 115, 1, 151-162.

[22] Huang, Y. F. (2007). Economic order quantity under conditionally permissible delay in payments. European Journal of Operational Research, 176, 2, 911-924.

[23] Aggarwal, S. P., Jaggi, C. K. (1995). Ordering policies of deteriorating items under permissible delay in payments. Journal of the Operational Research Society, 46, 5, 658-662.

[24] Jamal, A. M. M., Sarker, B. R., Wang, S. (1997). An ordering policy for deteriorating items with allowable shortage and permissible delay in payment. Journal of the Operational Research Society, 48, 8, 826-833.

[25] Sarker, B. R., Jamal, A. M. M., Wang, S. (2000). Supply chain models for perishable products under inflation and permissible delay in payment. Computers & Operations Research, 27, 1, 59-75.

[26] Chang, H. J., Hung, C. H., Dye, C. Y. (2001). An inventory model for deteriorating items with linear trend demand under the condition of permissible delay in payments. Production planning & control, 12, 3, 274-282.

[27] Yang, H. L. (2004). Two-warehouse inventory models for deteriorating items with shortages under inflation. European Journal of Operational Research, 157, 2, 344-356.

[28] Zhou, Y. W., Yang, S. L. (2005). A two-warehouse inventory model for items with stock-level-dependent demand rate. International Journal of Production Economics, 95, 2, 215-228.

ضمیمه:

برای اثبات لم ۱ $F_1(T)$ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} F_1(T) = & -A - \frac{(h+P\theta)D}{\theta^2}\left[e^{\theta T} - \theta T - 1\right] \\ & + D\frac{(h+P\theta)T - C}{\theta^2}\left[\theta e^{\theta T} - \theta\right] + CDTe^{\theta T} \\ & + \frac{I_k CD}{\theta^2}\left[\theta T e^{\theta(T-M)} - e^{\theta(T-M)} - \theta M + 1\right] \\ & + \frac{I_e PDM^2}{2} \end{aligned} \tag{A1}$$

با مشتق‌گیری از $F_1(T)$ در بازه $T \in [M, \infty)$ داریم:

$$\frac{dF_1(T)}{dT} = (h + P\theta + C\theta)e^{\theta T_1} + I_k C e^{\theta(T_1 - M)} \tag{A2}$$

بنابراین $F_1(T)$ در بازه $T \in [M, \infty)$ اکیداً صعودی است. از رابطه A1 داریم:

$$F_1(M) = \Delta_1 \quad , \quad \lim_{T\to\infty} F(T) = \infty \tag{A3}$$

در نتیجه اگر $F_1(M) = \Delta_1 \le 0$ باشد با استفاده از نظریه مقدار میانی می‌توان اظهار کرد که مقدار منحصربفردی نظیر $T_1 \in [M, \infty)$ وجود دارد به نحوی‌که $F_1(T_1) = 0$ باشد. به‌علاوه با مشتق‌گیری مرتبه دوم از $TRC_1(T)$ در نقطه T_1 داریم:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 TRC_1(T)}{dT^2}\Big|_{T=T_1} = \\ & \frac{D}{T_1}\left[(h + P\theta + C\theta)e^{\theta T_1} + I_k C e^{\theta(T_1 - M)}\right] > 0 \end{aligned} \tag{A4}$$

بنابراین $T_1 \in [M, \infty)$ پاسخ بهینه $TRC_1(T)$ منحصربفرد است.
از طرفی اگر $F_1(M) = \Delta_1 > 0$ باشد به ازای هر $T \in [M, \infty)$ داریم $F_1(T) > 0$. بنابراین $\frac{d^2 TRC_1(T)}{dT^2} = \frac{F_1(T)}{T^2} > 0$. در نتیجه $TRC_1(T)$ تابعی اکیداً صعودی در بازه $[M, \infty)$ است. پس $TRC_1(T)$ در نقطه‌ی $T = M$ دارای مقدار کمینه است. بدین ترتیب اثبات کامل می‌شود.

IERPS Journal of Industrial Engineering Research in Production Systems

ISSN: 2345-2269

Journal of Industrial Engineering Research in Production Systems

Spring and Summer 2014 Volume 2. No.3. PP. 77-91

www.ier.basu.ac.ir

An economic order quantity model under partial trade credit linked to order quantity for deteriorating items

N. Pourmohammad Zia, A.A. Taleizadeh*

Department of Industrial Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran

A R T I C L E   I N F O

***Article history*:**

Received 21 December 2013
Accepted 6 July 2014

***Keywords*:**

Inventory models
Economic order quantity
Partial trade credit
Linked to order trade credit
Deterioration

A B S T R A C T

This paper proposes a model, which aims to analyze the partial trade credit financing in a supply chain by economic order quantity-based model for deteriorating items. If the order quantity is more than a specified quantity fully permissible delayed payment is possible, otherwise partial trade credit is offered. Selling and purchasing costs are not equal and interest charged in stocks is not necessarily greater than interest earned on investment. In order determine the unique and optimum solution several lemmas and theorems are defined. Finally to show validity of the proposed model and applicability of developed algorithm, experimental results are provided.

* Corresponding author. Ata Allah Taleizadeh

Tel.: 021-82084486; *E-mail addresses*: taleizadeh@ut.ac.ir