نشـــریه پـــژوهـــش‌های مهنـــدســـی صنــــایع در سیستـــم‌هـــای تولیـــد
IERPS
ISSN: 2345-2269
سال سوم شماره پنجم بهار و تابستان ۱۳۹۴، صفحـــــه ۱۳-۲۵
www.ier.basu.ac.ir

مدل کنترل موجودی با طول دوره بازپرسازی تصادفی و پرداخت معوقه برای کالاهای فسادپذیر

عطاالله طالعی‌زاده[1,*]، علی صالحی[2]
۱. استادیار دانشکده مهندسی صنایع، پردیس دانشکده های فنی، دانشگاه تهران، تهران
۲. کارشناسی ارشد مهندسی صنایع، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب، تهران

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
دریافت ۱۳۹۳/۷/۲۳
پذیرش ۱۳۹۴/۳/۲۴

کلمات کلیدی:
کنترل موجودی
کالای فسادپذیر
مدت تحویل تصادفی
پرداخت معوقه
معامله اعتباری

خلاصه

در سیستم کنترل موجودی کلاسیک، فرض بر این است که درآمد فروش، در زمان تحویل کالا، فوراً دریافت می‌شود و کالاها می‌توانند عمر نامحدود داشته باشند. اما در دنیای واقعی کالاهایی وجود دارند که در طول زمان رو به زوال رفته و چنان‌چه نرخ زوال قابل توجه باشد، اثرات آن را باید مدنظر قرار داد. همچنین جهت ترغیت خریدار، فروشنده می‌تواند به خریدار اجازه دهد تا هزینه خرید را با تأخیر، پرداخت کند تا یک سیاست تشویقی برای او ایجاد شود. در این مقاله یک مسأله کنترل موجودی دوره‌ای مورد بررسی قرار خواهد گرفت که در آن زمان مراجعه ویزیتور به خریدار یک متغیر تصادفی است. در حقیقت مدل میزان سفارش اقتصادی تحت سه شرایط تصادفی بودن مدت تحویل، لحاظ کردن سیاست پرداخت معوقه و فسادپذیری کالا توسعه داده می‌شود. در این مقاله به اثبات مقعر بودن تابع متوسط سود خریدار و شرایطی که این تابع باید داشته باشد تا میزان بهینه سقف موجودی تعیین شود، می‌پردازیم. هدف اصلی تعیین سقف موجودی خریدار است، به نحوی که سود ماکزیمم شود. برای تشریح مدل نیز یک مثال عددی و تحلیل حساسیت ارائه می‌شود.

۱- مقدمه و پیشینه تحقیق

تحقیقات کنترل موجودی، عمدتاً به دو صورت سیاست مرور پیوسته و مرور دوره‌ای انجام می‌پذیرد. در سیاست مرور پیوسته می‌توانیم در هر لحظه از زمان با توجه به موقعیت موجودی در دست، اقدام به بازپرسازی کنیم، در حالی‌که در سیاست مرور دوره‌ای فقط در زمان‌های خاص مجاز به انجام این کار هستیم. حال برای آن‌که مسأله، شکل واقعی به خود پیدا کند، طول دوره در هر یک از سیاست‌های مرور پیوسته و مرور دوره‌ای می‌تواند یک متغیر تصادفی و کالایی که وارد سیستم می‌شود، کالایی فسادپذیر باشد. کالای فاسدشدنی به کالایی اطلاق می‌گردد که در طی زمان خراب، ضایع، خشک و یا تبخیر شده و یا به‌عبارت دیگر، کالا از عملکرد مورد انتظار خود انحراف داشته باشد. بسیاری از محصولات نظیر انواع موادغذایی، دارویی، شیمیایی و خون و غیره در این زمره قرار دارند. در بسیاری از مدل‌های موجودی در ادبیات موضوع فرض شده است که اقلام موجودی برای مدت زمان نامحدودی قابل ذخیره‌سازی می‌باشند در حالی‌که زوال امری است که در دنیای واقعی برای بسیاری از محصولات با گذشت زمان رخ می‌دهد و چنان‌چه نرخ زوال قابل چشم‌پوشی نباشد، لحاظ کردن آن در مدل‌سازی سیستم موجودی امری ضروری است.

یکی دیگر از فرضیات اصلی در سیستم‌های کنترل موجودی کلاسیک این است که خریدار به محض دریافت کالا، اقدام به پرداخت هزینه خرید کالا می‌نماید. در حالی‌که در واقعیت ممکن است فروشنده برای خریدار مدت زمان معینی را به‌منظور پرداخت هزینه خرید درنظر بگیرد. این شیوه معامله که به معامله اعتباری معروف است، به‌عنوان سیاست تشویقی جهت جذب مشتریان بیشتر از سوی تأمین‌کنندگان به کار گرفته می‌شود. البته حالت دیگری وجود دارد که خریدار به فروشنده این اجازه را می‌دهد تا کالای خود را با تأخیر دریافت کند، که این سیاست تشویقی جهت جذب فروشندگان بیشتر از سوی خریداران اعمال می‌شود. در این مقاله یک مدل کنترل

* نویسنده مسئول. عطاالله طالعی‌زاده
تلفن: ۸۲۰۸۴۴۸۶ – ۰۲۱؛ پست الکترونیک: taleizadeh@ut.ac.ir

موجودی تحت سیاست فروش ویزیتوری که زمان مراجعه ویزیتور به خریدار صورت تصادفی است را با درنظر گرفتن پرداخت معوقه و فسادپذیری کالا توسعه می‌دهیم. نکته‌ی قابل توجه این است که خریدار می‌تواند در هر زمان از دوره اعتباری تخصیص یافته‌اش، اقدام به بازپرداخت بدهی خود نماید و هیچگونه بهره اضافه پرداخت نکند. به عبارت دیگر در سیستم کنترل موجودی تحت سیاست انگیزشی خرید اعتباری، زمانی که سفارش صورت می‌گیرد، فروشنده به اعتبار خریدار، این اجازه را به وی می‌دهد که هزینه خرید را با تأخیر پرداخت کند. همان‌گونه که واضح است اِعمال معامله اعتباری، هزینه‌های سیستم موجودی را تغییر می‌دهد و روابط کلاسیک، دیگر در این سیستم‌ها صدق نمی‌کند. بنابراین هزینه‌های سیستم موجودی و سیاست بهینه آن‌ها بایستی مجدداً محاسبه شوند.

تحقیقاتی که در رابطه با تصادفی بودن طول دوره، فسادپذیری، پرداخت معوقه و خرید اعتباری صورت گرفته است را به‌صورت زیر بیان می‌کنیم. بلکا[۱] در یک مسئله کنترل موجودی با مرور دوره‌ای، محدودیت میزان سفارش، محدودیت در میزان کمبود پس‌افت شده، مدت تحویل ثابت، و تقاضای تصادفی، با بررسی تغییرات مدت تحویل و هزینه سفارش‌دهی، زمان بهینه سفارش را تعیین کرد. چیانگ[۲] یک مدل مرور دوره‌ای را مدنظر قرار داد، که طول دوره نسبتاً بلند است. هزینه‌های مسئله شامل هزینه خرید، نگهداری و ثابت سفارش‌دهی بوده و ضمناً در مسئله تخفیف نیز درنظر گرفته شده است. نکته حائز اهمیت در این تحقیق، لحاظ کردن سفارش اضطراری برای پرهیز از کمبود بوده که با هزینه‌ای بیشتر از حالت عادی اقدام به بازپرسازی می‌شود. ضمناً در این مقاله از برنامه‌ریزی پویا استفاده شده است. ارتوگرال و همکارش[۳] مسئله را فقط در شرایط تصادفی بودن طول دوره مورد بررسی قرار داده‌اند. تنگ و همکارانش[۴] در مدلی که ارائه دادند به دنبال تعیین زمان بهینه بازپرسازی و قیمت فروش بهینه بودند. آن‌ها تقاضا را به صورت تابعی نزولی از قیمت درنظر گرفته و کمبود را مجاز ندانستند. آچوان[۵] در مقاله‌اش بر روی یک مسئله بازپرسازی تک محصولی چند دوره‌ای محدودیت‌دار تحقیق و نهایتاً توانست به یک جواب بهینه برسد. ایشان با یک مسئله بازپرسازی چند دوره‌ای و چند فروشنده‌ای روبه‌رو بودند. افق برنامه‌ریزی محدود، و مدل، هزینه‌های خرید و سفارش‌دهی را در برمی‌گیرد. ضمناً برای سفارش کالا نیز محدودیت سفارش وجود دارد. از طرفی موجودی اولیه و موجودی انتهای دوره نیز صفر درنظر گرفته می‌شود. محبی[۶] در یک سیستم موجودی با مرور پیوسته تقاضا را پواسون مرکب درنظر گرفته و مدت تحویل را نیز تصادفی فرض کرده است. محبی و همکارانش[۷] روی یک سیستم کنترل موجودی با مرور دوره‌ای و بازپرسازی چندگانه و تحویل چند مرحله‌ای تحقیق کرده‌اند. آن‌ها تقاضا را گسسته فرض کردند، که از توزیع پواسون تبعیت می‌نماید و کمبود مجاز بوده و سیاست فروش از دست رفته در آن استفاده شده است. وانگ[۸] بر روی یک مسئله بازپرسازی با تقاضای افزایشی غیرخطی تحقیق کرده است. ایشان یک روش هیورستیک ارائه کرده و در پایان، آن را با روش‌های دیگر مقایسه نمود. آقای وانگ، زمان و مقدار بازپرسازی بهینه را در شرایطی که تقاضا به‌صورت غیرخطی افزایش می‌یابد، به‌دست آورد. طالعی‌زاده و همکاران[۹] یک مدل کنترل موجودی چند محصولی را تحت شرایط تصادفی بودن طول دوره و محدودیت فضا توسعه دادند. اویانگ و همکاران[۱۰] سیاست بهینه‌ای را برای کالاهایی که به‌صورت پیوسته در حال فساد هستند، تحت شرایطی که فروشنده تأخیر در پرداخت را مجاز می‌داند، بررسی کرده‌اند. موسوی و همکاران [۱۱] یک زنجیره تأمین سه سطحی که شامل خریدار، فروشنده و بانک می‌باشد را تحت شرایطی توسعه دادند که دوره اعتباری توسط فروشنده به خریدار اعلام می‌شود و وجوه نقد در بانکی که که وابسته به فروشنده است، کنترل می‌شود. آن‌ها فرض کردند که بانک مقدار مشخصی تخفیف در نرخ وام را به فروشنده می‌دهد و این هماهنگی باعث کاهش هزینه‌ها می‌شود.

جمال و همکارانش[۱۲] سیاست سفارش‌دهی را تحت خرید اعتباری وقتی کمبود مجاز است، توسعه دادند. چنگ و دای[۱۳] مدلی را که در آن کالاها فسادپذیر باشند و تأخیر در پرداخت و کمبود پس افت جزئی، مجاز باشد، ارائه دادند. هونگ[۱۴] یک مدل دو سطحی از خرید اعتباری را بیان کرد، که علاوه بر اینکه زمان پرداخت معوقه را فروشنده به خریدار اعلام می‌کند، خریدار نیز می‌تواند زمان پرداخت معوقه را به فروشنده اعلام کند. از جمله مقالات مروری که در زمینه فسادپذیری محصولات منتشر شده است، می‌توان به کار باکر و همکاران [۱۵] اشاره کرد. در این مقاله به مرور ادبیات مقالات مرتبط با مبحث فسادپذیری از سال ۲۰۰۱ تاکنون با درنظر گرفتن فرضیاتی از جمله تخفیف در قیمت، تک محصولی و یا چندمحصولی بودن، کمبود پس‌افت و فروش از دست‌رفته، و پرداخت‌های معوقه پرداخته شده است. سونی و همکارانش [۱۶] نیز مروری بر ادبیات موضوع مدل‌های موجودی تحت شرایط خرید اعتباری که شامل مواردی همچون میزان سفارش اقتصادی، فسادپذیری، تقاضای احتمالی و ارزش فعلی پرداخت‌ها است، پرداختند. اُیانگ و همکارانش[۱۷] مانند گویال[۱۸] میزان سفارش اقتصادی را تحت سیاست پرداخت معوقه و فسادپذیری کالاها به شرطی که اولاً قیمت خرید بیشتر از قیمت فروش هر واحد از کالا باشد، و بهره دریافتی توسط بانک، لزومی ندارد که بالاتر از نرخ سرمایه برگشتی باشد، تعیین کرده‌اند. جمال و همکارانش[۱۹] سیاست بهینه‌ای را جهت تعیین میزان بهینه سفارش کالاهای فسادپذیر تحت سیاست پرداخت معوقه و وجود کمبود، به‌دست آوردند. هونگ و لیاُ[۲۰] روش ساده ای را برای تعیین مقدار سفارش بهینه کالاهای فسادپذیر که نرخ فساد تابعی از توزیع نمایی بوده و فروشنده تخفیف نقدی را درنظر نگرفته و صرفاً پرداخت معوقه درنظر گرفته شده است، توسعه داده‌اند. پرادهان و همکارش[۲۱] یک مدل EOQ را برای کالاهای فسادپذیری که از تابع توزیع وایبول سه متغیره تبعیت می‌کند، توسعه داده‌اند. همچنین در این مقاله کمبود جزئی وجود دارد. یانگ و

همکارش[۲۲] به بررسی میزان سفارش اقتصادی کالاهای فسادپذیری در یک زنجیره تأمین که پرداخت معوقه در آن‌ها مجاز است، پرداخته‌اند. به گونه‌ای که تأمین کننده به خرده فروش و خرده فروش به مشتری این اجازه را می‌دهند که هزینه‌هایشان را با تأخیر پرداخت کنند. ملامحمدی و همکارانش[۲۳] به بررسی اکثر مقالاتی که در رابطه با خرید اعتباری بوده است، پرداخته‌اند. هو و لین [۲۴] یک جریان نقدی در مدلEOQ که کالاها با فساد روبه‌رو هستند و تأخیر در پرداخت مجاز است و کل ارزش فعلی هزینه‌های به‌دست آمده، حداقل شود، را توسعه داده‌اند. چونگ[۲۵] روش جایگزینی را برای تعیین مقدار سفارش اقتصادی تحت شرایط پرداخت معوقه توسعه داد. أیانگ و همکارانش[۲۶] میزان سفارش اقتصادی برای کالاهای فسادپذیر را به گونه‌ای توسعه دادند که فروشنده زمان پرداخت معوقه را پیشنهاد می‌دهد. در این مقاله کمبود جزئی مجاز نبوده و قیمت فروش باید بزرگتر از قیمت خرید هر واحد از کالا باشد. چونگ و لیا[۲۷] مسأله تعیین مقدار سفارش اقتصادی برای کالاهای فسادپذیر که نرخ فساد از توزیع نمایی تبعیت می‌کند را، در شرایطی که میزان سفارش، بستگی به زمان پرداخت معوقه دارد، بررسی کردند. پورمحمدضیا و طالعی‌زاده [۲۸] به بررسی مدل اندازه سفارش اقتصادی با فرض امکان پرداخت معوقه جزئی وابسته به حجم سفارشات، برای محصولات زوال‌پذیر در یک زنجیره‌تأمین پرداخته‌اند. سانا و همکارانش[۲۹] به ارائه مدلی از نوع تولیدی با نرخ تولید محدود، برای اقلام زوال‌پذیر در افق برنامه‌ریزی محدود پرداختند که تقاضای آن تابعی خطی از زمان است. مسئله شامل یک نوع کالای زوال‌پذیر با نرخ زوال ثابت است و کمبود کالا مجاز و تمامی آن به صورت پس‌افت برآورده می شود. افق زمانی موردنظر به تعداد محدودی دوره برابر (از نظر طول زمان) تقسیم شده است. در این تحقیق هدف کمینه کردن متوسط هزینه در افق برنامه‌ریزی بوده است.

در جدول (۱) دسته‌بندی از مقالات بررسی شده در این بخش ارائه شده است. نکته حائز اهمیت در تحقیق حاضر، بررسی مدل کنترل موجودی کالاهای فسادپذیر با طول دوره تصادفی و پرداخت معوق، به‌صورت همزمان می باشد، که در تحقیقات گذشته بدان پرداخته نشده است.

۲- تعریف مسأله

چارچوب اصلی مسئله مورد بررسی در این مقاله بدین شرح است که فروشنده محصول خود را به یک خریدار می‌فروشد و این اختیار را به خریدار می‌دهد تا هزینه کالاهای سفارش داده شده را با تأخیر پرداخت کند و سیستم فروش به‌صورت ویزیتوری بوده و زمان مراجعه ویزیتور به فروشنده یک متغیر تصادفی است. در حقیقت طول دوره بازپرسازی یا سیکل سیستم کنترل موجودی کاملاً تصادفی است. از طرفی دیگر تمام محصولات سفارش داده شده توسط خریدار، قابلیت فسادپذیری را دارند.

جدول(۱): خلاصه مرور ادبیات

شماره مقاله	فرضیات و سیاست‌های تصمیم‌گیری						متغیرهای تصمیم مستقل و وابسته			
	فسادپذیری	کمبود	پرداخت معوقه	تخفیف	خرید اعتباری	تصادفی بودن طول دوره	هزینه	قیمت گذاری	زمان بهینه سفارش	سود
۱		*							*	
۲				*						*
۳						*				*
۴			*					*	*	
۷		*								*
۹						*				*
۱۰	*		*							*
۱۱				*	*		*			
۱۲		*			*					*
۱۳	*	*	*							*
۱۴			*		*					*
۱۷			*							*
۱۹	*	*	*							*
۲۰	*		*							*
۲۱	*	*								*
۲۲	*		*							*
۲۴	*		*				*			
۲۵			*							*
۲۶	*		*							*
۲۷	*									*
۲۸	*		*							*
۲۹	*	*					*			

تصادفی بودن طول دوره، مسئله موردنظر را به واقعیت نزدیک کرده است به‌گونه‌ای‌که در بسیاری از صنایع از جمله صنایع انحصاری کاملاً مشهود است. حتی در صنایع رقابتی نیز در بسیاری از موارد به علل مختلف، طول دوره می‌تواند دستخوش تغییرات فراوانی قرار گیرد. تحریم‌های اقتصادی کوتاه‌مدت، بحران‌های حاکم بر بازارهای داخلی و خارجی، مباحث مربوط به ترخیص کالا، گشایش اعتبار و بسیاری موارد دیگر هستند که منجر به تصادفی شدن زمان دریافت کالا و طول دوره می‌شوند. کمبود مواداولیه، رکود اقتصادی، فزونی عرضه بر تقاضا، بحران‌های اقتصادی و وقایع و حوادث طبیعی که بعضاً منجر به افزایش یا کاهش تقاضا می‌شوند، همه و همه مواردی هستند که طول دوره بازپرسازی را تحت تأثیر قرار می‌دهند. در نتیجه تصادفی بودن مدت تحویل، بانضمام معامله اعتباری و فسادپذیری کالا، مسأله مورد بحث را کاملاً به واقعیت نزدیک کرده است.

در مسائل فروشنده- خریدار، خریدار می‌تواند در بازه های زمانی تصادفی، فروشنده را ملاقات کند (فروش ویزیتوری) و سطح

موجودی خریدار که وابسته به نرخ تقاضا، موقعیت فعلی موجودی و تصادفی بودن زمان است، به گونه‌ای انتخاب شود که متوسط سود او نیز ماکزیمم شود. همچنین مسائلی که در ارتباط با سیاست پرداخت معوقه هستند نسبت به زمان پرداخت، هزینه معوقه و نرخ بهره‌های دریافتی و پرداختی به‌شدت حساس هستند. در حقیقت در این تحقیق با یک مدل کنترل موجودی دوره‌ای مواجه هستیم که در آن طول دوره یک متغیر تصادفی است که مدت تحویل سفارش‌های مختلف مستقل و هم‌توزیع فرض می‌شوند. تقاضایی که به سیستم وارد می‌شود ثابت و مشخص است و ضمناً در صورت بروز کمبود (کمبود مجاز است) درصدی پس‌افت و درصدی فروش از دست‌رفته می‌شود. هزینه‌های سیستم کنترل موجودی، شامل هزینه نگهداری، هزینه فساد، هزینه کمبود پس‌افت و فروش از دست‌رفته و هزینه خرید است. نرخ هزینه سرمایه، بیش از نرخ بهره دریافتی حاصل از فروش کالاهایی است که هنوز پول خرید آن پرداخت نشده است.

از لحاظ موقعیت زمانی، پرداخت معوقه (M) شامل دو حالت است: ۱- زمان پرداخت معوقه در بازه‌ای از زمان قرار بگیرد که کمبود وجود ندارد. ۲- زمان پرداخت معوقه در بازه‌ای از زمان قرار بگیرد که کمبود وجود دارد. حال تحت این شرایط قرار است، در هر سیکل سقف سطح موجودی (متغیر تصمیم R) به نحوی تعیین شود که متوسط سود حاصله برای خریدار، ماکزیمم شود. لذا مقاله حاضر به توسعه یک مدل برای اقلام فسادپذیر تحت شرایط تصادفی بودن فاصله زمانی بین دو بازپرسازی و لحاظ کردن سیاست پرداخت معوقه می‌پردازد. ابتدا به مدل‌سازی مسأله می‌پردازیم. در ادامه برای تشریح مدل، یک مثال عددی و تحلیل حساسیت ارائه می‌شود.

۳- مدل‌سازی

چون طول سیکل‌ها، متغیرهای تصادفی مستقل هستند، پس ماکزیمم کردن سود یک دوره، معادل ماکزیمم کردن سود کل دوره است. در نتیجه مسأله را برای یک دوره مدل‌سازی می‌کنیم. در این قسمت ابتدا پارامترها و متغیرهای تصمیم مستقل و وابسته را بیان می‌کنیم، سپس به مدل‌سازی تابع متوسط سود در یک دوره می‌پردازیم. پارامترهای مورد استفاده در این مقاله به صورت زیر هستند:

پارامترها

z	فاصله زمانی بین دو بازپرسازی (طول سیکل) که یک متغیر تصادفی است $(z_{\min} \le z \le z_{\max})$
p	قیمت فروش هر واحد از کالا در یک سیکل
w	هزینه خرید هر واحد از کالا در یک سیکل
π	هزینه هر واحد کمبود پس افت
c	هزینه فساد هر واحد کالا
β	درصدی از تقاضا که پس افت می‌شود
M	زمان پرداخت معوق که خریدار اعلام می‌کند
θ	نرخ ثابت زوال ($0<\theta<1$)
D	نرخ ثابت و مشخص تقاضا در یک سیکل
I_e	نرخ بهره دریافتی در یک سیکل
I_c	نرخ بهره پرداختی در یک سیکل
i	نرخ هزینه نگهداری در یک سیکل
$f(z)$	تابع چگالی احتمال برای متغیر تصادفی z
h	هزینه نگهداری هر واحد کالا در هر واحد زمان

متغیر تصمیم مستقل

R	سقف موجودی در یک سیکل

متغیرهای تصمیم وابسته

t_R	زمانی که موجودی در دست به صفر می رسد $t_R = R/D$
DC	متوسط هزینه فساد هر واحد از کالا در واحد زمان
$I(z)$	متوسط سطح موجودی در زمان z
Q'	تعداد کالای فاسد شده
L	متوسط فروش از دست‌رفته در هر سیکل
B	متوسط مقدار پس‌افت در هر سیکل
Q	متوسط مقدار سفارش در هر سیکل
TC	متوسط هزینه‌های موجودی در هر سیکل
IE	متوسط بهره اکتسابی توسط فروشنده
IC	متوسط بهره پرداختی توسط فروشنده
TP	متوسط کل سود پیش بینی شده

۳-۱- مدل‌سازی سود پیش‌بینی شده

با توجه به فرضیات مسأله و متغیرهای وابسته و مستقل، نمودارهای سیستم موجودی را در دو حالت مورد بررسی قرار می‌دهیم (به شکل (۱) مراجعه شود). حالت (i) در شرایطی است که فاصله زمانی بین بازپرسازی‌ها کوچک‌تر از زمانی باشد که سطح موجودی به صفر می‌رسد و کمبود وجود ندارد. حالت (ii) در شرایطی است که فاصله زمانی بین دو بازپرسازی بیش از زمانی است که طول می‌کشد تا سطح موجودی به صفر برسد و کمبود رخ دهد. حال با توجه به توضیحات فوق به مدلسازی می‌پردازیم. برای آن‌که بتوان سود پیش‌بینی شده را مدل‌سازی کرد، متوسط موجودی در هر سیکل، متوسط فروش از دست‌رفته و پس‌افت، متوسط هزینه فساد، متوسط بهره اکتسابی توسط فروشنده، متوسط بهره پرداختی توسط خریدار و در انتها متوسط مقدار سفارش را، محاسبه می‌کنیم. شایان ذکر است نمودارهای کنترل موجودی هر دو حالت در شکل (۱) ارائه شده‌اند. شکل سمت چپ بیانگر حالتی است که در لحظه صدور سفارش در سیستم کمبود وجود ندارد ($z_{\min} \le z < t_R$) و Q' حداکثر میزان کالاهایی است که دچار فساد شده‌اند و نمودار سمت راست مبین حالتی است که در لحظه صدور سفارش کمبود رخ داده است.

متوسط موجودی در یک سیکل

برای محاسبه هزینه‌های کنترل موجودی و عایدی‌های به‌دست آمده، ابتدا به محاسبه توابع موجودی در دست بر حسب زمان می‌پردازیم. برای متوسط سطح موجودی در زمان z که در آن کمبود وجود ندارد، ابتدا $I_1(z)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{cases} \dfrac{dI_1(z)}{dz} = -D - \theta I_1(z) \\ z_{\min} \le z \le \dfrac{R}{D}\ ,\ I_1(z_{\min}) = 0 \end{cases} \quad (۱)$$

می‌توان اثبات کرد که معادله دیفرانسیل خطی $y' = -p(x)y + q(x)$ که در آن y تابعی از x است و y' برابر $\dfrac{dy}{dx}$ است با، و $p(x)$ و $q(x)$ توابعی دلخواه از x هستند، دارای جواب زیر است[۳۰].

$$y = \frac{1}{e^{\int p(x)dx}}\left[\int e^{\int p(x)dx} q(x)dx + c\right] \quad (۲)$$

حال با توجه به روابط ذکر شده و با حل معادله دیفرانسیل (۱) داریم:

$$I_1(z) = \frac{D}{\theta}\left(e^{\theta(\frac{R}{D}-z)} - 1\right) \qquad z_{\min} \le z \le \frac{R}{D} \quad (۳)$$

و نهایتاً متوسط موجودی برابر است با:

$$I_1^{(1)}(z) = \int_{z_{\min}}^{t_R} I_1(z)dz \quad (۴)$$

و متوسط سطح موجودی در سیکلی که در آن کمبود وجود دارد با حل معادلات دیفرانسیل(۵) به‌دست می‌آید. لذا متوسط کل موجودی در معادله (۷) نشان داده شده‌است. از طرفی دیگر، تغییرات موجودی تحت تأثیر دو عامل اساسی تقاضا و فساد است. از آن‌جایی که فساد زمانی رخ می‌دهد که موجودی در دست مثبت باشد، پس کاهش موجودی تا قبل از زمان t_R وابسته به دو عامل تقاضا و فساد است و کاهش موجودی در زمان کمبود، فقط ناشی از تقاضای کالا است. $I_1^{(1)}$ نشان‌دهنده متوسط سطح موجودی در حالت (i) است. $I_1^{(2)}$ و $I_2^{(2)}$ به‌ترتیب نشان دهنده متوسط سطح موجودی تا قبل از زمان t_R و نشان‌دهنده متوسط سطح موجودی بعد از زمان t_R در حالت (ii) هستند.

$$\begin{cases} \dfrac{dI_1^{(2)}(z)}{dz} = -D - \theta I_1^{(2)}(z) \\ \dfrac{dI_2^{(2)}(z)}{dz} = -D \end{cases} \qquad t_R < z \le z_{\max} \quad (۵)$$

$$\begin{cases} I_1^{(2)}(z) = \dfrac{D}{\theta}\left(e^{\theta(\frac{R}{D}-z)} - 1\right) \\ I_2^{(2)}(z) = -D\left(z - \dfrac{R}{D}\right) \end{cases} \qquad t_R < z \le z_{\max} \quad (۶)$$

و نهایتاً متوسط کل موجودی برابر است با:

$$I(z) = \int_{z_{\min}}^{t_R} I_1^{(1)}(z) f(z)dz + \int_{t_R}^{z_{\max}} I_1^{(2)}(z) f(z)dz \quad (۷)$$

متوسط فروش از دست‌رفته و پس‌افت

در شکل (۱) نشان داده شده است که درصدی از کمبود پس‌افت می‌شود. طبق فرضیات مطرح شده، β بیانگر درصدی از کمبود است که پس‌افت خواهد شد و $1-\beta$ بیانگر درصدی از کمبود است که به‌صورت فروش از دست‌رفته خواهد بود. پس میزان کل کمبود (تقاضای برآورده نشده)، میزان فروش از دست‌رفته و نهایتاً میزان کمبود پس‌افت، به ترتیب در روابط (۸)، (۹) و (۱۰) نشان داده شده اند.

$$\int_{t_R}^{z_{\max}} (Dz - R) f(z)dz \quad (۸)$$

$$\begin{aligned} L &= (1-\beta)\int_{t_R}^{z_{\max}} I_2^{(2)}(z) f(z)dz \\ &= (1-\beta)\int_{t_R}^{z_{\max}} (Dz - R) f(z)dz \end{aligned} \quad (۹)$$

$$\begin{aligned} B &= \beta\int_{t_R}^{z_{\max}} I_2^{(2)}(z) f(z)dz \\ &= \beta\int_{t_R}^{z_{\max}} (Dz - R) f(z)dz \end{aligned} \quad (۱۰)$$

متوسط هزینه فساد کالا در یک سیکل

برای محاسبه هزینه فساد در هر سیکل، ابتدا باید تعداد کالاهایی که در هر دوره فاسد می‌شوند را به‌طور متوسط محاسبه کنیم. لذا میزان فساد در هر لحظه از زمان z برابر است با $\theta.I(z)$. در نتیجه تعداد کالاهایی که در هر دوره فاسد می‌شوند، برابر است با مجموع تعداد کالاهای فاسد شده در حالتی که کمبود وجود دارد و در حالتی که کمبود وجود ندارد.

$$\int_{z_{\min}}^{t_R} \theta.I_1(z).f(z)dz + \int_{t_R}^{z_{\max}} \theta.I_1^{(2)}(z).f(z)dz \quad (۱۱)$$

و نهایتاً متوسط هزینه فساد کالا در یک سیکل برابر است با:

$$DC = c.\theta.\left[\begin{array}{l} \displaystyle\int_{z_{\min}}^{t_R} I_1(z).f(z)dz \\ \displaystyle + \int_{t_R}^{z_{\max}} I_1^{(2)}(z).f(z)dz \end{array}\right] \quad (۱۲)$$

متوسط بهره اکتسابی و بهره پرداختی توسط خریدار

برای محاسبه متوسط بهره اکتسابی و بهره پرداختی، خریدار در یک دوره سفارش می‌دهد و در لحظه M هزینه را پرداخت می‌کند. لذا این امر باعث می‌شود که خریدار در بازه $[z, M[$ بهره‌ای را دریافت و در بازه $[M, t_R[$ بهره‌ای را پرداخت کند. بهره دریافتی و بهره پرداختی در روابط (۱۳) و (۱۴) محاسبه شده‌اند.

$$IE = I_e p\left[\begin{array}{l} \int_{z_{\min}}^{R/D}\int_{z}^{M}(I_1^{(1)}(\mathrm{u}))du.f(z)dz \\ +\int_{R/D}^{z_{\max}}(\int_{z}^{M} I_1^{(2)}(u)du \\ +\int_{z}^{M}\beta I_2^{(2)}(\mathrm{u})du).f(z)dz \end{array}\right]$$

$$= I_e p\left[\begin{array}{l} \int_{z_{\min}}^{R/D}(\frac{D}{\theta}\left(e^{\theta\frac{R}{D}}(e^{-\theta z'}-e^{-\theta z_{\min}})\right)+R)\cdot \\ (M-z)f(z)dz \\ +\int_{R/D}^{z_{\max}}(\frac{D}{\theta}\left[\begin{array}{l}\frac{1}{\theta}e^{\theta\frac{R}{D}}(e^{-\theta z}-e^{-\theta M}) \\ -(M-z)\end{array}\right] \\ +\beta(Dz-R)(M-z))f(z)dz \end{array}\right] \qquad (۱۳)$$

متوسط مقدار سفارش در یک سیکل

متوسط مقدار سفارش در یک دوره برابر است با مجموع تعداد کالاهای سفارش داده شده در دوره‌ای که کمبود وجود دارد و در دوره‌ای که کمبود وجود ندارد. لذا با توجه به شکل (۱) میزان سفارش در رابطه (۱۵) ارائه می‌شود..

$$IC = I_c w\left[\begin{array}{l} \int_{z_{\min}}^{R/D}(\int_{M}^{t_R} I_1^{(1)}(u)du).f(z)dz \\ +\int_{R/D}^{z_{\max}}(\int_{M}^{t_R} I_1^{(2)}(u)du).f(z)dz \end{array}\right]$$

$$= I_c w\left[\begin{array}{l} \int_{z_{\min}}^{R/D}(\frac{D}{\theta}\left(e^{\theta\frac{R}{D}}(e^{-\theta z'}-e^{-\theta z_{\min}})\right)+R)\cdot \\ (\frac{R}{D}-M)f(z)dz \\ +\int_{R/D}^{z_{\max}}\frac{D}{\theta}\left[\begin{array}{l}\frac{1}{\theta}(e^{\theta(\frac{R}{D}-M)}-1) \\ -(\frac{R}{D}-M)\end{array}\right]f(z)dz \end{array}\right] \qquad (۱۴)$$

$$Q = \left[\begin{array}{l} \int_{z_{\min}}^{t_R} I_1^{(1)}(z).f(z)dz \\ +\int_{t_R}^{z_{\max}}(I_1^{(2)}(\max)+\beta I_2^{(2)}(z)).f(z)dz \end{array}\right] \qquad (۱۵)$$

متوسط سود کل در یک سیکل

با توجه به مفروضات بالا و میزان متوسط بهره اکتسابی و بهره پرداختی که توسط خریدار دریافت و پرداخت می‌شود و با توجه به این‌که، اگر ویزیتور وارد سیستم نشود و سفارشی رخ ندهد، پرداخت معوقه‌ای وجود نخواهد داشت، در نتیجه قطعاً $M > Z$ است. لذا دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: $Z < M < t_R$

حالت دوم: $Z < t_R < M$

در هر یک از دو حالت فوق، باید متوسط سود مستقیم از فروش محصولات را، محاسبه کنیم. هزینه‌ها، شامل هزینه خرید، هزینه کمبود، هزینه نگهداری، هرینه فساد و هزینه سرمایه هستند.

حالت اول: اگر $Z < M < t_R$ رخ دهد، با توجه به معادلات (۱) الی (۱۵) می‌توانیم متوسط سود کل، که تابعی از سقف موجودی است را به‌دست آوریم. که در معادله (۱۶) نشان داده شده است.

متوسط کل سود پیش بینی شده = سود کل –
متوسط هزینه‌های موجودی در هر سیکل = سود
کل – هزینه خرید – هزینه نگهداری – هزینه
کمبود – هزینه فسادپذیری – هزینه سرمایه (۱۶)

و نهایتاً با محاسبه هر یک از عبارات رابطه (۱۶)، می‌توان رابطه (۱۷) را نوشت.

حالت دوم: اگر $Z < t_R < M$ رخ دهد، همانند حالت قبل عمل می‌کنیم، با این تفاوت که دیگر هزینه سرمایه وجود ندارد. پس متوسط سود کل، که تابعی از سقف موجودی است برابر است با:

متوسط کل سود پیش بینی شده = سود کل –
متوسط هزینه‌های موجودی در هر سیکل = سود
کل – هزینه خرید – هزینه نگهداری – هزینه
کمبود – هزینه فسادپذیری (۱۸)

۴- روش حل

در این قسمت به اثبات مقعر بودن توابع سود در هر دو حالت می‌پردازیم. برای آن‌که نشان دهیم توابع سود نسبت به R مقعر هستند، ثابت می‌کنیم که مشتق دوم TP نسبت به R در حالت اول و دوم منفی است.

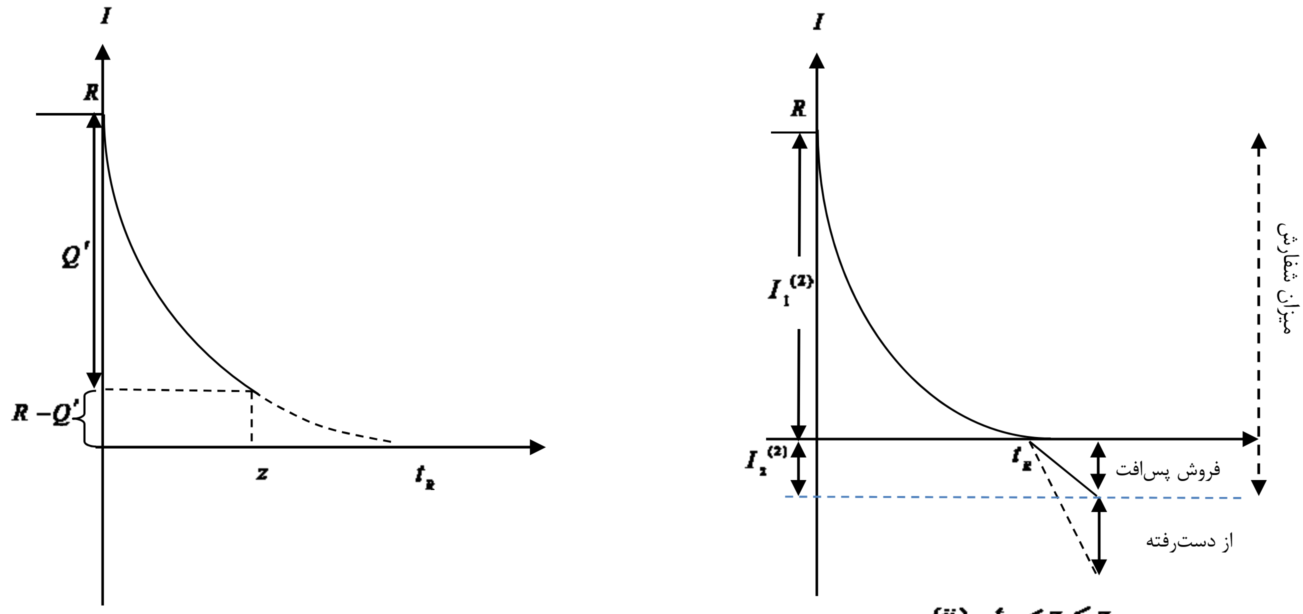
لم ۱- تابع TP در حالت اول، در بازه $(z_{\min}, z_{\max})$ نسبت به R مقعر است.

اثبات. به پیوست (۱) در ضمیمه مراجعه شود.

لم ۲- تابع TP در حالت دوم، در بازه (z_{min}, z_{max}) نسبت به R مقعر است.

اثبات. به پیوست (۲) در ضمیمه مراجعه شود.

با توجه به مفروضات مسأله و تا زمانی که $R > 0\ , D > 0\ , c > 0\ , f\ (t_R) > 0\ , I_c \ge I_e \ge 0\ ,$ $w > p > 0$ و $0 < \beta \le 1$ برقرار باشند، می‌توان نتیجه گرفت که $\frac{\partial^2 (TP)}{\partial R^2}$ همیشه منفی است و لذا تابع TP در حالت های اول و دوم نسبت به R در بازه $\left(Z_{min}, Z_{max}\right)$ مقعر است. از طرف دیگر برای بازه $Z_{min} < t_R < Z_{max}$ که در آن $f\ (t_R) = 0$ است، به‌راحتی می‌توان مشاهده کرد که تابع TP نسبت به R در بازه $-\infty < R \le DZ_{max}$ مقعر است. لذا می‌توان یک جواب بهینه یکتایی را در بازه $\left[-\infty, DZ_{max}\right]$ به‌دست آورد. در نتیجه با مساوی صفر قرار دادن ریشه مشتق اول تابع سود نسبت به متغیر تصمیم، R، می‌توان جواب بهینه را به‌دست آورد. با توجه به پیچیدگی معادله مشتق می‌توان از یکی از نرم‌افزارهای MATLAB، MATHEMATICA، و یا MAPLE برای به‌دست آوردن ریشه مشتق که جواب بهینه دقیق را نتیجه خواهد داد، استفاده کرد.



(i) $z_{min} \le z < t_R$ (ii) $t_R < z \le z_u$

شکل (۱): نمایش شکل موجودی

۵- مثال عددی

شرایطی را در نظر بگیرید که یک فروشگاه زنجیره‌ای برای سفارش محصولات لبنی با ویزیتوری مواجه است که به‌صورت نامنظم و کاملاً تصادفی به این فروشگاه مراجعه می‌نماید. ضمناً برای فروش محصولات خود به‌عنوان یک سیاست انگیزشی پرداخت معوقه را به خریدار پیشنهاد می‌دهد. ضمنا کالای عرضه شده نیز فسادپذیر است و در صورت فاسدشدن مرجوع نمی‌شود. حال خریدار باید در مورد سقف موجودی و میزان سفارش خود تصمیم‌گیری نماید. جهت ارائه هر چه بهتر مدل و مسئله پیشنهادی در این بخش یک مثال عددی را بررسی خواهیم کرد. ارتوگرال و همکارانش [۳] در مقاله خود ۳ مسأله را طرح و آن را حل نمودند. در این قسمت از برخی اطلاعات مسائل ارائه شده ایشان استفاده می‌کنیم و برای سایر پارامترها مقادیر $i = ۰.۱$ ، $\pi = ۲$ ، $w = ۳۰$ ، $D = ۵$ ، $I_e = ۰.۲$ ، $I_c = ۰.۲۵$ ، $c = ۱۰$ ، $\theta = ۰.۰۱$ را در نظر می گیریم. در هر یک از حالت های اول و دوم، ۸ مسئله که در تمامی آنها زمان بین دو بازپرسازی، از تابع چگالی نمایی تبعیت می‌کند را، حل خواهیم کرد. پس برای حل مدل، با قرار دادن $f\ (\mathrm{z}) = \lambda e^{-\lambda z}$ در معادله‌های (۱۹) و (۲۱)، و با استفاده از توابع (۱۶) و (۱۸)، متوسط سود کل پیش‌بینی شده را محاسبه می‌کنیم و خروجی مدل را در جداول (۲) و (۳) نشان می‌دهیم.

با توجه به جداول (۲) و (۳) می‌توان مشاهده کرد که با افزایش زمان پرداخت معوقه و درصدی از تقاضا که به‌صورت پس‌افت می‌باشد، متوسط سقف سطح موجودی و سود بدست آمده برای خریدار

افزایش می‌یابد، که کاملاً منطقی است. پس اگر فروشنده در سیکل‌هایی که زمان پرداخت معوقه در آن ها بیشتر است، با خریدار ملاقات کند، عایدی بیشتری را بدست می‌آورد.

البته با توجه به نتایج بدست آمده از جدول (۳) بهتر است خریدار بدون درنظر گرفتن قیمت فروش کالا، زمانی‌که $M=۴۵,\ \lambda=۱/۳۵,\ \beta=۰.۵$ هستند، سفارش ندهد، زیرا عایدی کمتری را به‌دست می‌آورد.

از طرف دیگر، زمانی‌که $z<t_R<M$ اتفاق می‌افتاد، هزینه سرمایه وجود ندارد و این بدان معناست که خریدار در این حالت باید عایدی بیشتری را به‌دست آورد. لذا همان‌گونه که انتظار می‌رفت سود به‌دست آمده در این حالت بیشتر از زمانی است که $z<M<t_R$ و با توجه به جداول (۲) و (۳)، می‌توان دریافت که با افزایش قیمت فروش، سود به‌دست آمده نیز افزایش می‌یابد. به‌عبارتی دیگر، با افزایش قیمت فروش و با ثابت نگه داشتن سایر پارامترها، می‌توان مشاهده کرد که متوسط سود کل پیش‌بینی شده در حال افزایش است.

۶- تحلیل حساسیت

در این قسمت، سعی بر آن داریم که با تغییر در بعضی از پارامترهای ورودی مسأله، درصد تغییراتی که در R^* و TP^* به‌وجود می آید را بررسی نماییم. از آن‌جایی‌که مثال عددی ارائه شده دارای شانزده حالت مختلف است، در این قسمت تنها به مسأله‌ای پرداخته می‌شود که دارای $R^*=۲۳۶.۹۴۷$ و $(TP)^*=۷۷۲.۸۸۰$ است.

جدول (۲): نتایج به‌دست آمده برای حالت اول

متغیرهای تصمیم		پارامترها			
TP^*	R^*	M	λ	β	p
۱۰۰۵۳	۷۱.۳۴	۱۲	۱/۱۵	۰.۵	۱۲۰
۳۹۹۸۳	۱۷۰.۲۲	۳۲	۱/۳۵	۰.۵	۱۲۰
۱۱۲۰۵	۶۹.۶۶	۱۲	۱/۱۵	۰.۹	۱۲۰
۴۱۲۱۷	۱۶۹.۶۳	۳۲	۱/۳۵	۰.۹	۱۲۰
۲۰۷۱۷	۷۴.۲	۱۲	۱/۱۵	۰.۵	۱۵۰
۶۲۷۷۴	۱۷۲.۵۱	۳۲	۱/۳۵	۰.۵	۱۵۰
۲۲۱۹۳	۷۲.۲	۱۲	۱/۱۵	۰.۹	۱۵۰
۶۴۴۳۳	۱۷۱.۹۴	۳۲	۱/۳۵	۰.۹	۱۵۰

جدول(۳): نتایج به‌دست آمده برای حالت دوم

متغیرهای تصمیم		پارامترها			
TP^*	R^*	M	λ	β	p
۱۸۰۱۴۰	۱۱۸.۲۵	۲۵	۱/۱۵	۰.۵	۱۲۰
۱۰۴۱۲۰	۳۵۵.۱۳	۴۵	۱/۳۵	۰.۵	۱۲۰
۱۸۴۶۸۰	۱۲۳.۴۶	۲۵	۱/۱۵	۰.۹	۱۲۰
۵۹۸۷۵۰	۲۳۵.۹۶	۴۵	۱/۳۵	۰.۹	۱۲۰
۲۳۵۶۹۰	۱۱۸.۵۲	۲۵	۱/۱۵	۰.۵	۱۵۰
۱۴۴۶۹۰	۳۵۶.۳۵	۴۵	۱/۳۵	۰.۵	۱۵۰
۲۴۱۸۴۰	۱۲۴.۰۱	۲۵	۱/۱۵	۰.۹	۱۵۰
۷۷۲۸۸۰	۲۳۶.۹۴	۴۵	۱/۳۵	۰.۹	۱۵۰

از جدول (۴) می‌توان مشاهده کرد که TP^* و R^* نسبت به نرخ تقاضا حساس هستند و درصد تغییرات متوسط سقف موجودی و متوسط تابع سود، تقریباً برابر با درصد تغییرات در پارامتر D است. از جمله پارامترهایی که تأثیر مستقیم در مقدار تابع هدف مسأله دارند، می‌توان به قیمت فروش هر واحد از کالا، تقاضا، هزینه فساد هر واحد از کالا و نرخ بهره دریافتی اشاره کرد و می‌توان مشاهده کرد که با افزایش تغییرات در این پارامترها، تغییرات در مقدار TP^* نیز افزایش می‌یابد. از آنجایی که پارامتر w ، هزینه خرید هر واحد از کالا می‌باشد، طبق جدول (۴) با افزایش تغییرات در این پارامتر، متوسط سقف موجودی و مقدار $(TP)^*$، کمتر می‌شود و هر چه درصد تغییرات در این پارامتر کاهش یابد، عایدی بیشتری را خریدار به‌دست می‌آورد، که کاملاً منطقی است. به‌عبارتی دیگر، با افزایش و کاهش درصد تغییرات در این پارامتر، میزان سود بدست آمده برای خریدار، به ترتیب کاهش و افزایش می‌یابد. با توجه به نتایج تحلیل حساسیت انجام شده، می‌توان تأثیر تغییر در پارامترهای مسأله را بر مقادیر بهینه متغیرهای تصمیم مشاهده کرد و به‌درستی مدل‌سازی اذعان داشت. همچنین در بین پارامترها، R^* و TP^* کمترین حساسیت را، نسبت به c دارند و این بدان معنا است که سود حاصله نسبت به هزینه فساد هر واحد از کالا کمترین حساسیت را از خود نشان می‌دهد.

جدول (۴): نتایج تحلیل حساسیت

درصد تغییرات در مقادیر پارامترها		درصد تغییرات متغیرهای تصمیم	
		R^*	TP^*
D	+۶۰	۵۹.۹۹	۵۹.۹۹
	+۲۰	۱۹.۹۹	۲۰
	-۲۰	-۲۰.۰۲	-۱۹.۹۹
	-۶۰	-۶۰	-۶۰
p	+۶۰	۰.۶۱	۶۷.۶۵
	+۲۰	۰.۲۷	۲۲.۵۴
	-۲۰	-۰.۴۱	-۲۲.۵۳
	-۶۰	-۲.۵	-۶۷.۴۵
w	+۶۰	-۰.۹۷	-۷.۴۹
	+۲۰	-۰.۳۲	-۲.۵۱
	-۲۰	۰.۳۱	۲.۵۲
	-۶۰	۰.۹۵	۷.۶۱
c	+۶۰	-۰.۰۰۱	- ۰.۰۴
	+۲۰	-۰.۰۰۰۵	- ۰.۰۱۴
	-۲۰	۰.۰۰۰۵	۰.۰۱۵
	-۶۰	۰.۰۰۱	۰.۰۴
I_e	+۶۰	-۲.۳	۳۶.۹۹
	+۲۰	-۱.۰۲	۱۲.۲۲
	-۲۰	۱.۴۷	-۱۲.۰۲
	-۶۰	۶۲.۵۱	-۶۶.۵۴

۷- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این مقاله یک مدل کنترل موجودی برای کالاهای فسادپذیر که طول دوره کنترل موجودی یک متغیر کاملاً تصادفی است، تحت

سیاست پرداخت معوقه توسعه داده شد. در مدلسازی صورت گرفته، پس از بدست آوردن هزینه‌های اساسی در سیستم کنترل موجودی و محاسبه تابع سود، به اثبات مقعر بودن توابع هدف در هر دو حالت پرداختیم و از آنجایی که مقعر بودن توابع را اثبات کردیم، می‌توان نتیجه گرفت که در بازه‌ای که تقعر تابع ثابت شده است، می‌توان مقداری را به‌عنوان جواب بهینه دقیق سقف سفارش‌دهی تعیین کرد. در انتها با ذکر یک مثال عددی توانستیم حل بهینه مدل ارائه شده را با استفاده از تابع چگالی نمایی به‌دست آوریم. همان‌طور که در مثال عددی مشاهده کردیم، با افزایش قیمت فروش و افزایش درصدی از تقاضا که پس‌افت می‌شود، سود حاصله نیز افزایش یافت.

از جمله تحقیقات آتی که می‌توان برای موضوع مدنظر پیشنهاد کرد عبارت‌اند از:

۱) نرخ تقاضا را به‌صورت تابعی خطی و یا غیرخطی وابسته به قیمت در نظر گرفت.
۲) نرخ فساد تابعی از زمان باشد.
۳) زمان پرداخت معوقه وابسته به مقدار سقف موجودی و یا به صورت جزئی درنظر گرفته شود.
۴) سیاست پرداخت معوقه، دو سطحی درنظر گرفته شود.

مراجع

[1] Bylka S. (2005). Turnpike Policies for Periodic Review Inventory Model with Emergency Orders, International Journal of Production Economics, 93-94: 357-373.

[2] Chiang C. (2003). Optimal Replenishment For a Periodic Review Inventory System With Two Supply Modes, European Journal of Operational Research, 149: 229-244.

[3] Ertogral K., Rahim M.A. (2005). Replenish-Up-To Inventory Control Policy with Random Interval Replenishment, International Journal of Production Economics, 93-94: 399-405.

[4] Teng J.T. Chang C.T., Goyal S.K. (2005). Optimal pricing and ordering policy under permissible delay in payment. International Journal of Production Economics, 97: 121-129.

[5] Achuthan N.R. (2003). Single item multi-period multi-retailer inventory replenishment problem with restricted order size, Computer and industrial engineering, 68: 16 - 25.

[6] Mohebbi E.(2004). A Replenishment Model for the Supply-Uncertainty Problem, International Journal of Production Economics, 87: 25-37.

[7] Mohebi E., Morton J.M., Posner K. (2002). Multiple Replenishment Orders in Continuous-Review Inventory System With Lost Sales, Operation Research Letters, 30:117-129.

[8] Wang S.P. (2002). On inventory replenishment with non-linear increasing demand, Computer & operations Research, 29: 1819-1825.

[9] Taleizadeh, A.A. Aryanezhad M.B., Makoee, A. (2009). "utilization of simulated annealing in optimization of a multi-product inventory control model with stochastic replenishment and space constraint", International Journal of Industrial Engineering & Production Research, 20:1-10

[10] Ouyang, L.Y., Wu K. S., Yang, C.T. (2006). "A Study on an Inventory Model for Non-Instantaneous Deteriorating Items with Permissible Delay in Payments," Computers and Industrial Engineering, 51: 637-651.

[11] Moussawi-Haidar, L., Dbouk, W., Jaber, M.Y. Osman, I.H. (2014). "Coordinating a three-level supply chain with delay in payments and a discounted interest rate," Computers & Industrial Engineering, 69: 2014.

[12] Jamal, A., Sarker B. Wang S. (1997). An Ordering Policy for Deteriorating Items with Allowable Shortage and Permissible Delay in Payment," Journal of Operational Research Society, 48: 826-833.

[13] Chang H.J. Dye, C.Y. (2001). "An Inventory Model for Deteriorating Items with Partial Backlogging and Permissible Delay in Payments," Journal of Systems Science, 32: 345-352.

[14] Huang, Y.F. (2003). "Optimal Retailer's Ordering Policies in the EOQ Model under Trade Credit Financing," Journal of Operational Research Society, 54: 1011-1015.

[15] Bakker, M., Riezebos, J. Teunter, R.H. (2012). "Review of inventory systems with deterioration since 2001", European Journal of Operational Research, 221: 275–28.

[16] Soni, H., Shah, N.H., Jaggi, C.K. (2010). "Inventory models and trade credit: a review," Control and Cybernetics, 39: 867–880.

[17] Ouyang, L.Y. (2009). "An economic order quantity model for deteriorating items with partially permissible delay in payments linked to order quantity", European Journal of Operational Research, 194: 418–431.

[18] Goyal, S.K. 1985. EOQ under conditions of permissible delay in payments. Journal of the Operational Research Society 36: 335–338.

[19] Jamal, A.M.M., Sarker B.R. Wang S. (1997). "An ordering policy for deteriorating items with allowable shortage and permissible delay in payment", The Journal of the Operational Research Society, 48:826-833.

[20] Huang, K.N., Liao J.J. (2008). "A Simple Method to Locate the Optimal Solution for Exponentially Deteriorating Items under Trade Credit Financing," Computers and Mathematics with Applications, (56), 4: 965-977.

[21] Pradhan, L.M., Tripathy. C.K. (2013). "An Eoq Model For Three Parameter Weibull Deteriorating Item With Partial Backlogging", Scientific Journal of Logistics, 25: 1895-2038.

[22] Chung, K.J. Liao, J.J. (2008). "An Eoq Model For Deterioration Items Under Trade Credit Policy In A Supply Chain System", Journal of the Operations Research, 52: 46-57.

[23] Molamohamadi, Z., Ismail, N. (2014), "Reviewing the Literature of Inventory Models under Trade Credit Contact" , Discrete Dynamics in Nature and Society, Article ID 975425, 19 pages.

[24] Hou K.L. Lin, L.C. (2009). "A Cash Flow Oriented EOQ Model with Deteriorating Items under Permissible Delay in Payments," Journal of Applied Sciences, 9: 1791-1794.

[25] Chung, K.J. (1998). "A Theorem on the Determination of Economic Order Quantity under Conditions of Permissible Delay in Payments," Computers & Operations Research, 25: 49-52.

[26] Ouyang, L.Y., Teng, J.T. (2006). "Optimal Ordering Policy for Deteriorating Items with Partial Backlogging under Permissible Delay in Payments", Journal of Global Optimization, 34: 245–271.

[27] Chung K.J., Liao, J.J. (2004). “Lot-Sizing Decisions under Trade Credit Depending on the Ordering Quantity,” Computers & Operations Research, 31: 909-928.

[۲۸] پورمحمدضیا، نادیا، طالعی زاده، عطا الله، (۱۳۹۳). مدل اندازه سفارش اقتصادی با پرداخت معوقه جزئی و وابسته به حجم سفارش برای محصولات زوال پذیر، پژوهش‌های مهندسی صنایع در سیستم‌های تولیدی، دوره ۲، شماره ۳، ۷۷-۹۱.

[29] Sana, S., Goyal, S.K. and Chaudhuri, K.S. (2004) "A production-inventory model for a deteriorating item with trended demand and shortages", European Journal of Operational Research, 57:357-371.

[30] Boyce, W.E., Diprima, R.C., Elementary differential equations and boundary value problems. Third Edition, John Wiley, 1977.

ضمیمه ۱: اثبات لم ۱

نشان می‌دهیم که مشتق دوم تابع TP نسبت به R منفی است. می دانیم:

$$
\begin{aligned}
TP = (p-w)&\left[\begin{array}{l}
\int_{z_{\min}}^{R/D} \left(\frac{D}{\theta}\left(e^{\theta\frac{R}{D}}(e^{-\theta z'}-e^{-\theta z_{\min}})\right)+R\right)\cdot \\
f(z')dz' \\
+\int_{R/D}^{z_{\max}}\left(\begin{array}{l}\frac{D}{\theta}\left(e^{\theta(\frac{R}{D}-z_{\min})}-1\right)\\ +\beta(Dz-R)\end{array}\right)f(z)dz
\end{array}\right] \\
-iw&\left[\begin{array}{l}
\int_{z_{\min}}^{R/D}\frac{D}{\theta}\left(e^{\theta(\frac{R}{D}-z')}-1\right)f(z')dz' \\
+\int_{R/D}^{z_{\max}}\frac{D}{\theta}\left(e^{\theta(\frac{R}{D}-z)}-1\right)f(z)dz
\end{array}\right] \\
&-(p-w)(1-\beta)\int_{R/D}^{z_{\max}}(Dz-R)f(z)dz \\
&-\pi\beta\int_{R/D}^{z_{\max}}(Dz-R)f(z)dz \\
+I_e p&\left[\begin{array}{l}
\int_{z_{\min}}^{R/D}\left(\frac{D}{\theta}\left(e^{\theta\frac{R}{D}}(e^{-\theta z'}-e^{-\theta z_{\min}})\right)+R\right)\cdot \\
(M-z)f(z)dz \\
+\int_{R/D}^{z_{\max}}\left(\frac{D}{\theta}\left[\begin{array}{l}\frac{1}{\theta}e^{\theta\frac{R}{D}}(e^{-\theta z}-e^{-\theta M})\\ -(M-z)\end{array}\right]\right. \\
\left.+\beta(Dz-R)(M-z)\right)f(z)dz
\end{array}\right] \\
-c&\left[\begin{array}{l}
\int_{z_{\min}}^{t_R}\theta.\frac{D}{\theta}\left(e^{\theta(\frac{R}{D}-z')}-1\right).f(z')dz' \\
+\int_{t_R}^{z_{\max}}\theta.\frac{D}{\theta}\left(e^{\theta(\frac{R}{D}-z)}-1\right).f(z)dz
\end{array}\right] \\
-I_c w&\left[\begin{array}{l}
\int_{z_{\min}}^{R/D}\left(\frac{D}{\theta}\left(e^{\theta\frac{R}{D}}(e^{-\theta z'}-e^{-\theta z_{\min}})\right)+R\right)\cdot \\
(\frac{R}{D}-M)f(z)dz \\
+\int_{R/D}^{z_{\max}}\frac{D}{\theta}\left[\begin{array}{l}\frac{1}{\theta}(e^{\theta(\frac{R}{D}-M)}-1)\\ -(\frac{R}{D}-M)\end{array}\right]f(z)dz
\end{array}\right]
\end{aligned}
\qquad (۱۷)
$$

پس مشتق اول تابع TP نسبت به R برابر است با:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial(TP)}{\partial R} = (p-w)&\left[\begin{array}{l}
\frac{1}{D}\left(\frac{D}{\theta}(1-e^{\theta(\frac{R}{D}-z_{\min})})+R\right).f(z') \\
+\int_{z_{\min}}^{\frac{R}{D}}\left(e^{\theta\frac{R}{D}}(e^{-\theta z'}-e^{-\theta z_{\min}})+1\right)f(z')dz' \\
-\frac{1}{\theta}(e^{\theta(\frac{R}{D}-z_{\min})}-1).f(z)dz \\
+\int_{\frac{R}{D}}^{z_{\max}}\left(e^{\theta(\frac{R}{D}-z_{\min})}-\beta\right).f(z)dz
\end{array}\right] \\
-iw&\left[\int_{z_{\min}}^{R/D}\left(e^{\theta(\frac{R}{D}-z')}\right)f(z')dz'+\int_{R/D}^{z_{\max}}\left(e^{\theta(\frac{R}{D}-z)}\right)f(z)dz\right] \\
&+\left[(p-w)(1-\beta)+\pi\beta\right]\int_{R/D}^{z_{\max}}f(z)dz \\
-c\theta&\left[\int_{z_{\min}}^{R/D}\left(e^{\theta(\frac{R}{D}-z')}\right)f(z')dz'+\int_{R/D}^{z_{\max}}\left(e^{\theta(\frac{R}{D}-z)}\right)f(z)dz\right]
\end{aligned}
$$

$$
+I_e p\left[\begin{array}{l}
\frac{1}{D}\left(\begin{array}{l}(\frac{D}{\theta}(1-e^{\theta(\frac{R}{D}-z_{\min})})+R)\cdot \\ (M-\frac{R}{D})\end{array}\right) f(z) \\
+\int_{z_{\min}}^{\frac{R}{D}} (e^{\theta\frac{R}{D}}(e^{-\theta z'}-e^{-\theta z_{\min}})+1)(M-z)\,f(z)dz \\
-\frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{\theta}(1-e^{\theta(\frac{R}{D}-M)})-(M-\frac{R}{D})\right) f(z) \\
+\int_{\frac{R}{D}}^{z_{\max}} \left(\begin{array}{l}(\frac{1}{\theta}e^{\theta\frac{R}{D}}\left(e^{-\theta z}-e^{-\theta M}\right) \\ -\beta(M-z))\,f(z)dz\end{array}\right)
\end{array}\right]
$$

$$
-I_c w\left[\begin{array}{l}
\frac{1}{D}\left((\frac{D}{\theta}(1-e^{\theta(\frac{R}{D}-z_{\min})})+R)(\frac{R}{D}-M)\right) f(z) \\
+\int_{z_{\min}}^{\frac{R}{D}} \left(\begin{array}{l}(e^{\theta\frac{R}{D}}.(e^{-\theta z'}-e^{-\theta z_{\min}})+1)(\frac{R}{D}-M) \\ +\frac{1}{D}.(\frac{D}{\theta}(1-e^{\theta(\frac{R}{D}-z_{\min})})+R)\end{array}\right) f(z)dz \\
-\frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{\theta}(e^{\theta(\frac{R}{D}-M)}-1)-(\frac{R}{D}-M)\right) f(z) \\
+\int_{\frac{R}{D}}^{z_{\max}} (\frac{1}{\theta}e^{\theta(\frac{R}{D}-M)}-\frac{1}{\theta})\,f(z)dz
\end{array}\right] \qquad (۱۹)
$$

و مشتق دوم تابع TP نسبت به R برابر است با:

$$
\frac{\partial^2(TP)}{\partial R^2}=-(p-w)\left[\begin{array}{l}
(e^{\theta(\frac{R}{D}-z_{\min})}-\frac{1}{D})f(z')-\frac{(2-e^{\theta(\frac{R}{D}-z_{\min})})}{D}f(z) \\
-\int_{z_{\min}}^{\frac{R}{D}} \frac{\theta}{D}e^{\theta\frac{R}{D}}\left(e^{-\theta z'}-e^{-\theta z_{\min}}\right) f(z)dz \\
+\frac{e^{\theta(\frac{R}{D}-z_{\min})}}{D}f(z)+\frac{(e^{\theta(\frac{R}{D}-z_{\min})}-\beta)}{D}f(z) \\
-\int_{\frac{R}{D}}^{z_{\max}} \frac{\theta}{D}e^{\theta(\frac{R}{D}-z_{\min})}f(z)dz
\end{array}\right]
$$

$$
-iw\frac{\theta}{D}\left[\begin{array}{l}
\int_{z_{\min}}^{R/D}\left(e^{\theta(\frac{R}{D}-z')}\right)f(z')dz' \\
+\int_{R/D}^{z_{\max}}\left(e^{\theta(\frac{R}{D}-z)}\right)f(z)dz
\end{array}\right]
$$

$$
-\frac{f(z)}{D}\left[(p-w)(1-\beta)+\pi\beta\right]
$$

$$
-I_e p\left[\begin{array}{l}
\frac{1}{D}((e^{\theta(\frac{R}{D}-z_{\min})}-1)(M-\frac{R}{D}) \\
+\frac{1}{D}(R-\frac{D}{\theta}(e^{\theta(\frac{R}{D}-z_{\min})}-1)))\,f(z) \\
+\frac{1}{\theta D}(1-e^{\theta(\frac{R}{D}-M)})\left(1+f(z)\right) \\
+\frac{\theta}{D}\int_{z_{\min}}^{R/D}\left(e^{\theta(\frac{R}{D}-z_{\min})}\right)(M-z)\,f(z)dz \\
+\frac{1}{D}(1-(e^{\theta(\frac{R}{D}-z_{\min})}))(M-\frac{R}{D})\,f(z) \\
-\frac{\beta}{D}(M-\frac{R}{D})\,f(z) \\
-\int_{R/D}^{z_{\max}}\frac{1}{D}e^{\theta\frac{R}{D}}\left(e^{-\theta Z}-e^{-\theta M}\right) f(z)dz
\end{array}\right]
$$

$$
-I_c w\left[\begin{array}{l}
\frac{2}{D}\left(\begin{array}{l}(1-(e^{\theta(\frac{R}{D}-z_{\min})}-1))(\frac{R}{D}-M) \\ +(R-\frac{D}{\theta}(e^{\theta(\frac{R}{D}-z_{\min})}-1))(\frac{1}{D})\end{array}\right) f(z) \\
+\int_{z_{\min}}^{R/D}\left(\begin{array}{l}-\frac{\theta}{D}e^{\theta(\frac{R}{D}-z_{\min})}(\frac{R}{D}-M) \\ +(1-e^{\theta(\frac{R}{D}-z_{\min})})(\frac{2}{D})\end{array}\right) f(z)dz \\
-\frac{1}{\theta D}\left((e^{\theta(\frac{R}{D}-M)})-1\right) f(z) \\
-\int_{R/D}^{z_{\max}}\frac{1}{D}(e^{\theta(\frac{R}{D}-M)})\,f(z)dz
\end{array}\right] \qquad (۲۰)
$$

$$
-c\theta\left[\int_{z_{\min}}^{R/D}\left(e^{\theta(\frac{R}{D}-z')}\right)f(z')dz'+\int_{R/D}^{z_{\max}}\left(e^{\theta(\frac{R}{D}-z)}\right)f(z)dz\right]
$$

$$
\frac{\partial^2(TP)}{\partial R^2}<0
$$

ضمیمه ۲: اثبات لم ۲

مشتق اول تابع TP نسبت به R برابر است با:

$$
\frac{\partial(TP)}{\partial R}=(p-w)\left[\begin{array}{l}
\frac{1}{D}(\frac{D}{\theta}(1-e^{\theta(\frac{R}{D}-z_{\min})})+R)\,f(z') \\
+\int_{z_{\min}}^{\frac{R}{D}}(e^{\theta\frac{R}{D}}(e^{-\theta z'}-e^{-\theta z_{\min}})+1)\,f(z')dz' \\
-\frac{1}{\theta}(e^{\theta(\frac{R}{D}-z_{\min})}-1)\,f(z)dz \\
+\int_{\frac{R}{D}}^{z_{\max}}(e^{\theta(\frac{R}{D}-z_{\min})}-\beta)\,f(z)dz
\end{array}\right]
$$

$$
\begin{aligned}
& -iw\left[\begin{array}{l}\displaystyle\int_{z_{\min}}^{R/D}\left(e^{\theta(\frac{R}{D}-z')}\right)f(z')dz' \\ \displaystyle+\int_{R/D}^{z_{\max}}\left(e^{\theta(\frac{R}{D}-z)}\right)f(z)dz\end{array}\right] \\
& +\left[(p-w)(1-\beta)+\pi\beta\right]\int_{R/D}^{z_{\max}}f(z)dz \\
& -c\theta\left[\begin{array}{l}\displaystyle\int_{z_{\min}}^{R/D}\left(e^{\theta(\frac{R}{D}-z')}\right)f(z')dz' \\ \displaystyle+\int_{R/D}^{z_{\max}}\left(e^{\theta(\frac{R}{D}-z)}\right)f(z)dz\end{array}\right] \\
& +I_e p\left[\begin{array}{l}\displaystyle\frac{1}{D}\left((\frac{D}{\theta}(1-e^{\theta(\frac{R}{D}-z_{\min})})+R)(M-\frac{R}{D})\right)f(z) \\ \displaystyle+\int_{z_{\min}}^{\frac{R}{D}}(e^{\theta\frac{R}{D}}.(e^{-\theta z'}-e^{-\theta z_{\min}})+1)\cdot \\ (M-z).f(z)dz \\ \displaystyle-\frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{\theta}(1-e^{\theta(\frac{R}{D}-M)})-(M-\frac{R}{D})\right)f(z) \\ \displaystyle+\int_{\frac{R}{D}}^{z_{\max}}\left(\begin{array}{l}(\frac{1}{\theta}e^{\theta\frac{R}{D}}\left(e^{-\theta z}-e^{-\theta M}\right) \\ -\beta(M-z))f(z)dz\end{array}\right)\end{array}\right]
\end{aligned}
\tag{۲۱}
$$

و مشتق دوم تابع TP نسبت به R برابر است با:

$$
\frac{\partial^2(TP)}{\partial R^2}=-(p-w)\left[\begin{array}{l}\displaystyle(e^{\theta(\frac{R}{D}-z_{\min})}-\frac{1}{D})f(z') \\ \displaystyle-\frac{(2-e^{\theta(\frac{R}{D}-z_{\min})})}{D}f(z) \\ \displaystyle-\int_{z_{\min}}^{\frac{R}{D}}\frac{\theta}{D}e^{\theta\frac{R}{D}}\left(e^{-\theta z'}-e^{-\theta z_{\min}}\right)f(z)dz \\ \displaystyle+\frac{e^{\theta(\frac{R}{D}-z_{\min})}}{D}f(z)+\frac{(e^{\theta(\frac{R}{D}-z_{\min})}-\beta)}{D}f(z) \\ \displaystyle-\int_{\frac{R}{D}}^{z_{\max}}\frac{\theta}{D}e^{\theta(\frac{R}{D}-z_{\min})}f(z)dz\end{array}\right]
$$

$$
\begin{aligned}
& -iw\frac{\theta}{D}\left[\int_{z_{\min}}^{R/D}\left(e^{\theta(\frac{R}{D}-z')}\right)f(z')dz'+\int_{R/D}^{z_{\max}}\left(e^{\theta(\frac{R}{D}-z)}\right)f(z)dz\right] \\
& -c\theta\left[\begin{array}{l}\displaystyle\int_{z_{\min}}^{R/D}\left(e^{\theta(\frac{R}{D}-z')}\right)f(z')dz' \\ \displaystyle+\int_{R/D}^{z_{\max}}\left(e^{\theta(\frac{R}{D}-z)}\right)f(z)dz\end{array}\right] \\
& -\frac{f(z)}{D}\left[\left(p-w\right)(1-\beta)+\pi\beta\right] \\
& -I_e p\left[\begin{array}{l}\displaystyle\frac{1}{D}((e^{\theta(\frac{R}{D}-z_{\min})}-1)(M-\frac{R}{D}) \\ \displaystyle+\frac{1}{D}(R-\frac{D}{\theta}(e^{\theta(\frac{R}{D}-z_{\min})}-1)))f(z) \\ \displaystyle+\frac{1}{\theta}(\frac{1}{D}-\frac{1}{D}e^{\theta(\frac{R}{D}-M)}) \\ \displaystyle+\frac{\theta}{D}\int_{z_{\min}}^{R/D}\left(e^{\theta(\frac{R}{D}-z_{\min})}\right)(M-z)f(z)dz \\ \displaystyle+\frac{1}{D}(1-(e^{\theta(\frac{R}{D}-z_{\min})}))(M-\frac{R}{D})f(z) \\ \displaystyle+\frac{1}{D}(\frac{1}{\theta}(1-(e^{\theta(\frac{R}{D}-M)})-\beta(M-\frac{R}{D}))f(z) \\ \displaystyle-\int_{R/D}^{z_{\max}}\frac{1}{D}e^{\theta\frac{R}{D}}\left(e^{-\theta Z}-e^{-\theta M}\right)f(z)dz\end{array}\right]
\end{aligned}
$$

IERPS Journal of Industrial Engineering Research in Production Systems

ISSN: 2345-2269

Journal of Industrial Engineering Research in Production Systems

Spring and Summer 2015 Volume 3. No.5. PP. 13-25

www.ier.basu.ac.ir

Inventory Control Model with Stochastic Replenishment Period Length and Delayed Payment for Deteriorating Item

A.A. Taleizadeh[1,*], A. Salehi[2]

1. School of Industrial Engineering, College of Engineering, University of Tehran, Tehran
2. School of Industrial Engineering, College of Engineering, Islamic Azad University, Tehran

ARTICLE INFO

***Article history*:**

Received 15 October 2014

Accepted 14 June 2015

***Keywords*:**

Inventory control
Deteriorating Item
Random lead-time
Delayed Payment
Trade credit

ABSTRACT

In classic inventory control system, purchasing cost must be paid when purchased items are received. Furthermore, in the mentioned models, items may have infinite lifetime, while in the real world, we have some items deteriorate over the time. Also, in order to increase the sales, the suppliers may allow the retailers to pay the purchasing cost some times after receiving the ordered products. Moreover, in the real life cases, the supplier may visit the retailer and send the ordered quantity at random time and the retailer faces to stochastic lead time; then, in this case, the retailer may face to shortage. In this paper, we will extend the periodic inventory control model under delay in payment, stochastic visit interval and partial backordering for a deteriorating item. Under general probability distribution function between replenishment epochs, we show the concavity of the expected profit function and give the condition that must hold for the optimal replenish-up-to-level in order to maximize the profit. In order to show the applicability of the proposed model, the numerical examples and sensitivity analysis are provided.

* Corresponding author. Ata Allah Taleizadeh
Tel.: 021-82084486; *E-mail addresses*: taleizadeh@ut.ac.ir