نشریه پژوهش‌های مهندسی صنایع در سیستم‌های تولید

نشریه پژوهش‌های مهندسی صنایع در سیستم‌های تولید

IERPS

ISSN: 2345-2269

سال دوم شماره چهارم پاییز و زمستان ۱۳۹۳، صفحه ۹۹–۱۱۳

www.ier.basu.ac.ir

تعیین سود بهینه فروشنده برای محصولات جایگزین و مکمل به کمک قیمت‌گذاری و در نظر گرفتن سیاست فروش بسته‌ای و تخفیف

عیسی نخعی‌کمال‌آبادی[1,*]، هیرش محمدی‌پور[2]، سیدحسام‌الدین ذگردی[3]

۱. استاد گروه مهندسی صنایع، دانشگاه کردستان، سنندج

۲. دانشجوی دکتری مهندسی صنایع، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

۳. دانشیار گروه مهندسی صنایع، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:

دریافت ۱۳۹۳/۵/۱۵

پذیرش ۱۳۹۳/۱۲/۱۳

کلمات کلیدی:

قیمت‌گذاری بسته‌ای

محصولات مکمل و جایگزین

سیاست فروش بسته‌ای

تخفیف

خلاصه

در سال‌های اخیر مفهوم ارزشمند سیاست قیمت‌گذاری در زنجیره تأمین شامل جایگزینی و مکمل بودن کالاها مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است. در این مقاله، به تأثیر کالاهای مکمل و کالاهای جایگزین بر سود فروشنده پرداخته می‌شود. به علاوه برای اولین بار فروش محصولات مکمل و جایگزین به‌صورت همزمان توسط یک فروشنده مدل می‌گردد. از آنجا که این گروه از محصولات از نظر قیمت‌گذاری بر یکدیگر تأثیر مستقیم دارند، لذا سیاست قیمت‌گذاری و فروش بسته‌ای محصولات با تخفیف و بدون تخفیف از ابزارهای است که فروشنده برای بیشینه‌سازی سود استفاده می‌کند. با توجه به موارد فوق در این مطالعه به بررسی مسأله در سه حالت خرده‌فروشی، فروش بسته‌ای در حالت‌های بدون تخفیف و با تخفیف پرداخته می‌شود و در هر مورد مقدار سود فروشنده در سناریوهای فوق ارزیابی می‌شود. چندین قضیه و الگوریتم برای حل مدل‌ها ارائه شد. ارائه جواب‌های بهینه در حالت مختلف برای مسأله از نقاط قوت این تحقیق به‌شمار می‌رود. در پایان از یک مثال عددی برای نمایش تأثیر مدل‌ها استفاده شد. مثال عددی نشان می‌دهد که حالت فروش بسته‌ای با تخفیف سود بیشتری عاید فروشنده می‌شود.

۱– مقدمه

قیمت‌گذاری یکی از موضوعاتی است که در سال‌های اخیر مورد توجه محققان قرار گرفته است و مطالعات مختلفی در این زمینه منتشر شده است [۱-۶]. قیمت‌گذاری به‌عنوان یک ابزار بسیار مهم در بیشنه‌سازی سود بنگاه تعریف می‌شود. صرف‌نظر از اینکه این ابزار در مدیریت درآمد به‌کار گرفته شود و یا در مدیریت زنجیره تأمین، روزانه برای تنظیم تقاضا، تنظیم تولید و توزیع استفاده می‌گردد [۷].

تحقیقات زیادی در گذشته در زمینه قیمت‌گذاری انجام شده است. ولی اکثر این مطالعات بر روی بهینه‌سازی قیمت یک محصول تمرکز داشته اند. برای مثال کی و همکارانش [۸] تأثیر تخفیف قیمت را بر روی قیمت‌گذاری زنجیره تأمین دو کاناله رقابتی بررسی کرد. کاو و همکارانش [۹] مسأله قیمت‌گذاری دینامیک را برای فروش محصول در افق زمانی محدود و نامحدود بررسی کردند. تانگ و ین [۵] یک مدل پایه را برای تقاضای مشخص خرده‌فروش و مقدار سفارش بهینه با استراتژی قیمت‌گذاری ثابت و متغیر ارائه دادند. واگنر و فریدل [۱۰] مطالعه کردند که چگونه خریداران به کمک بحث مهم قیمت‌گذاری بین تأمین‌کنندگان سوییچ کنند. زیا و همکارانش [۱۱] یک بازار رقابتی با چندین تأمین‌کننده و خریدار را برای

* نویسنده مسئول. عیسی نخعی‌کمال‌آبادی

تلفن: ۶۶۲۴۷۷۵ – ۰۸۷۱؛ پست الکترونیکی: e.nakhaeei@uok.ac.ir

یک محصول که چگونه ساختار هزینه‌های موجودی تأمین کننده می‌تواند بر روی بخش‌بندی بازار و استراتژی قیمت‌گذاری تأثیر گذارد بررسی کردند. چوی [۲] قیمت گذاری خرده فروشان را با اشتراک اطلاعاتی مطالعه کرد.

امروزه با توجه به تنوع بسیار محصولات در یک زنجیره و یا زنجیره‌های متفاوت تأمین، پدیده‌ی محصولات مکمل و محصولات جایگزین مورد توجه محققان قرار گرفته است. مفهوم مکمل بودن محصولات زمانی پدیدار می‌شود که مشتریان دو یا چند محصول را به‌صورت همزمان برای بهره‌گیری کامل از فایدهای محصولات خریداری می‌کنند [۱۲]. محصولات مکمل، محصولاتی هستند که با هم مصرف یا استفاده می‌شوند و تقاضای آنها بر روی هم تأثیر مثبت دارد مانند لپ‌تاپ و کیف لپ‌تاپ که با هم مصرف می‌شوند. در مقابل محصولات مکمل، محصولات جایگزین محصولاتی هستند که به‌جای همدیگر مصرف یا استفاده می‌شوند و تقاضای این محصولات اثر منفی بر روی تقاضای محصول دیگر دارد مانند لپ‌تاپ و تبلت که این دو محصول جایگزین هم به‌شمار می‌آیند بدین معنی که اگر تقاضا برای یکی از محصولات افزایش پیدا کند تقاضای محصول جایگزینش کاهش پیدا می‌کند.

در بحث محصولات مکمل، فروش بسته‌ای یکی از شیوه‌های رایج در بازاریابی به‌شمار می‌آید. فروش بسته‌ای یعنی فروش دو یا چند محصول با همدیگر مانند ست ساعت عروس و داماد که در یک بسته به فروش می‌رسد. قیمت‌گذاری این بسته‌ها خود به‌عنوان یک مسأله و چالش به حساب می‌آید. در این قبیل موارد باید فاکتورهای متعددی مانند تقاضای مشتریان، هزینه‌های مشخص محصول و سلیقه‌ها و انتظارات مختلف مشتری‌ها در نظر گرفته شود. نتیجه یک مطالعه [۱۳] نشان می‌دهد در فروش بسته‌ای، بسته به نوع و تعداد محصولاتی که در بسته ارائه می‌شود، هزینه‌های مشتریان را از ۱۸ تا ۵۷ درصد کاهش می‌دهد. بسته‌بندی محصولات به‌صورت گروهی و فروش بسته‌ای می‌تواند منجر به صرفه‌جویی‌های معینی از جمله زمان و هزینه حمل‌ونقل شود [۱۳].

در ادامه به مرور برخی مطالعات در مورد قیمت‌گذاری محصولات مکمل، فروش بسته‌ای و محصولات جایگزین خواهیم پرداخت.

نکاتش و ماهاجان [۱۴] در سال۱۹۹۳ یک مدل احتمالی پیشنهاد کردند که یک فروشنده می‌تواند از آن برای تعیین قیمت مطلوب یک بسته محصول با ترکیب و بسته‌بندی و شیوه‌های ترکیبی استفاده کند. این مدل بالاترین سطح سوددهی را برای هر بسته تخمین می‌زند ولی فقط در محیط انحصاری کار برد دارد و در محیط رقابتی با فروشنده‌ها و خریداران متعددی که بر هر دو محصول هم از لحاظ بسته بندی و هم قیمت تأثیرگذار هستند جوابگو نیست.

وانکاتش و کاماکورا [۱۵] در سال ۲۰۰۳ یک مدل تحلیلی برای الگوهای تعیین قیمت و استراتژی‌های بسته‌بندی مطلوب در یک محیط انحصاری پیشنهاد کردند. نتایج این مطالعه نشان می‌دهد راه‌حل‌های بهینه برای محصولات مکمل و جایگزین مستقل از ارزش آنها تفاوت دارد. هزینه‌های جانبی نقش مهمی در تعیین روش‌های مطلوب قیمت‌گذاری بازی می‌کند و مصرف‌کنندگان تمایل به پرداخت هزینه‌ی بیشتری برای محصولات مکمل در بسته‌بندی نسبت به محصولات به‌صورت مجزا دارند.

آرورا [۱۶] در سال ۲۰۰۸ یک آزمایش را برای مطالعه‌ی تأثیر ارائه‌ی قیمت و ایجاد پیام بر روی محصولات مکمل و جلب توجه و گرایش مصرف‌کنندگان به اجرا درآورد. نتایج تحقیق او نشان داد هم ارائه‌ی قیمت و هم ایجاد پیام، تأثیر بسزایی بر روی گرایش مشتریان دارد.

هانسون و مارتین [۱۷] در سال ۱۹۹۰ با استفاده از اجزا مختلف و قیمت رزرواسیون، یک مدل بهینه‌سازی برای ارائه استراتژی بهینه قیمت‌گذاری بسته محصول پیشنهاد کرد. مدل آنها برای حل دامنه‌ی وسیعی از مسائل قیمت‌گذاری بسته‌ای پاسخگو بود.

چانگ و سیربو [۱۸] در سال ۱۹۹۹ یک مدل فروش بسته‌ای چند محصوله با لحاظ سلیقه مصرف‌کننده در ابعاد مختلف در یک محیط انحصاری ارائه نمودند، آنها از نمونه‌ی کتابخانه‌هایی که دارای روزنامه‌های آنلاین و چاپی هستند برای رسیدن به تقاضاهای پژوهشگران در راستای ساخت نمونه مقالات شخصی خود استفاده کردند. بنابراین مدل آنها به طرف ملاحظه‌ی ذخایر معطوف شد، که بسته‌بندی کالا، صرفه‌جویی در هزینه‌ها را در حالت اقتصادی پیشنهاد می‌کند.

واپلینگ و همکارانش [۱۹] در سال۲۰۱۰ در مورد اشتراک و ارتباط ممکن میان جهت‌گیری‌های تجاری و شیوه‌های بسته‌بندی محصول و تأثیر مشتری بر فروش بسته‌ای تحقیقی انجام دادند. نتایج آنها می‌تواند این چنین به‌صورت خلاصه درآید:

- دلایل بسته‌بندی محصول در بخش‌های خودروسازی و مسافربری، تولید و فروش بیشتر است، در حالی‌که در بخش بانکداری مشتری‌مداری مهم است.
- تأثیر استراتژی‌های فروش بسته‌ای بر روی مشتریان در صنعت مسافربری بسیار زیاد است اما در صنعت خودروسازی و بانکداری تأثیر زیادی ندارد.
- مشتریان بخش‌های مسافرتی و بانکداری تأثیر مستقیمی بر روی این‌که بسته‌بندی‌ها چگونه طراحی می‌شوند دارند، در حالی‌که به نظر می‌رسد مشتریان صنعت خودروسازی تاثیر محدودی در طراحی بسته‌بندی‌ها دارند.

رویلیانگ یانگ و سوبیر باندیوپاداهیای [۲۰] در سال ۲۰۱۱ قیمت‌گذاری دو محصول مکمل را به‌صورت جداگانه بررسی می‌کند سپس مدل بهینه فروش محصولات مکمل را به‌صورت بسته‌ای بیان می‌کند.

تعداد مطالعات بسیار محدودی هستند که مسأله قیمت‌گذاری محصولات مکمل را بررسی کرده‌اند [۱۲،۲۱،۲۲]. زیائوهانگ یو و همکارانش [۲۳] در سال ۲۰۰۶ بازاری را که مشتری نیازمند خرید دو کالای مکمل از دو بنگاه بود را بررسی کردند. آنها از مدل برتراند تئوری بازی‌ها برای بررسی سه حالت استفاده کردند. ۱- هنگامی‌که اطلاعات پیش‌بینی شده بین شرکت‌ها نامتقارن است. ۲-زمانی‌که اطلاعات پیش‌بینی شده بین شرکت‌ها به اشتراک گذاشته می‌شد. ۳- زمانی‌که شرکت‌ها با هم همکاری می‌کنند و یک استراتژی انتخاب می‌کنند.

جی وی و همکارانش [۲۴] در سال ۲۰۱۳ مطالعه‌ای را برای مسأله قیمت‌گذاری دو محصول مکمل در زنجیره تأمینی شامل دو تولیدکننده و یک خرده‌فروش انجام دادند. نویسندگان پنج مدل قیمت‌گذاری برای تصمیم‌گیری غیرمتمرکز شامل MS-Stackelberg، MS-Bertrand، RS-Bertrand، RS-Stackelberg و NG models با در نظر گرفتن قدرت

هرکدام از اعضا ارائه کردند. با استفاده از تئوری بازی‌ها جواب تحلیلی برای پنج مدل بیان نمودند.

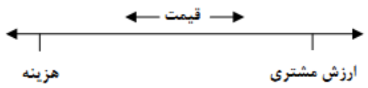
امروزه بسیاری از شرکت‌های شناخته شده ممکن است محصولات مکمل و جایگزین را با قیمت‌های مختلف به‌منظور بقا در محیط رقابتی تولید کند. تفاوت قیمت ممکن است شرایط، انگیزه مشتریان و انتخاب آنها را تغییر دهد [۲۵]. در برخی از مطالعات بحث قیمت‌گذاری محصولات جایگزین را برای محصولات جایگزین فصلی بررسی کرده‌اند [۲۵-۲۸]. برای مثال، رسولی و نخعی کمال‌آبادی [۲۵] در سال ۲۰۱۴ یک مدل ریاضی جدید قیمت‌گذاری و کنترل موجودی توام به‌صورت پویا برای محصولات جایگزین و فصلی در بازار رقابتی برای یک افق زمان برنامه‌ریزی محدود ارائه کردند. در آن مطالعه، فرض بر این است که دو کالا جانشین متعلق به دو شرکت مختلف رقیب است و هدف تعیین بهینه قیمت، مقدار سفارش و تعداد دوره برای یک محصول در حالت متقارن و نامتقارن به‌طوری که سود کل شرکت مربوطه حداکثر شود.

جینگ ژائو و همکارانش [۲۹] در سال ۲۰۱۲ قیمت‌گذاری محصولات جایگزین را در یک در زنجیره تأمین با یک تولیدکننده و دو خرده‌فروش در حالت رقابتی مطالعه کردند. آنها تقاضای بازار و هزینه‌های تولیدکننده را به‌صورت فازی نشان دادند و براساس ساختارهای مختلف بازار، یک مدل قیمت‌گذاری متمرکز و سه مدل قیمت‌گذاری غیرمتمرکز توسعه داده و متناظر با راه‌حل تعادل تحلیلی با استفاده از روش نظریه بازی‌ها به‌دست آوردند و در نهایت، از مثالی عددی برای نشان دادن اثربخشی نتایج نظری استفاده کردند.

در ادبیات مطالعاتی وجود دارند که مبحث محصولات جایگزین را برای هماهنگی در زنجیره تأمین غیرمتمرکز با هدف یافتن مکانیزمی برای هماهنگی در فعالیت‌های اعضا به‌منظور دستیابی به راه‌حل بهینه بررسی نموده اند، برای مثال هسیه و وو [۳۰] در سال ۲۰۰۹ یک مدل غیرهماهنگ و سه مدل هماهنگ برای یک زنجیره تأمین که شامل دو تأمین‌کننده و یک خرده‌فروش با تقاضای تصادفی برای دو محصول جایگزین ارائه کردند. یاو و همکارانش [۳۱] در سال ۲۰۰۸ یک قرارداد مدیریت درآمد برای هماهنگی یک زنجیره تأمین با یک تولیدکننده و دو خرده‌فروش برای فروش دو محصول جایگزین را بررسی کردند. یولکو گورلر و یولماز [۳۲] در سال ۲۰۱۰ مسأله موجودی پسر روزنامه‌فروش برای دو محصول جایگزین فاسدشدنی در یک زنجیره تأمین دوسطحی شامل تولیدکننده و خرده‌فروش به‌منظور دستیابی به حداکثر سود تولیدکننده و خرده‌فروش بررسی کردند. از میان مکانیزم‌های هماهنگی در زنجیره تأمین، قراداد بازگشتی را انتخاب کردند.

فروش محصولات مکمل و جایگزین به‌صورت همزمان، از مسائلی است که تاکنون در مطالعات گذشته بررسی نشده است. امروزه بنگاه‌ها به‌دنبال دست‌یابی به اهدافی مانند کسب سهم مشخصی بازار، کسب اعتبار، حفظ سهم موجود و مشتریان فعلی، دست‌یابی به بازار جدید و مشتریان جدید، حداقل‌سازی هزینه‌ها و بیشینه‌سازی سود و غیره می‌باشند. یکی از راه‌های نیل به این اهداف و جذب مشتری، تنوع محصول و ویترین کامل محصولات است، پس فروشنده محصولات مکمل و جایگزین را جهت فروش ارائه می‌دهد. بعضی وقت‌ها مشتری نیاز به خرید چندین محصول مکمل دارد ولی به‌دلیل نیافتن آنها کنار هم یا فراموش می‌کند و یا منصرف می شود. بسته‌بندی محصولات مکمل منجر به صرفه‌جویی در زمان و کاهش هزینه‌های حمل و نقل جهت یافتن این محصول می‌شود و همین موضوع منجر به فروش بیشتر و نهایتاً کسب سود بیشتر می‌شود. یکی از ابزارهای فروش بیشتر استفاده از سیاست‌های تشویقی مانند تخفیف است که می‌تواند منجر به جذب مشتری و افزایش فروش شود. تخفیف از سیاست‌های است که وفاداری مشتری و جذب مشتریان جدید را به‌دنبال خواهد داشت.

از پارامترهای دیگر تأثیرگذار در تصمیم‌گیری هنگام خرید، قیمت محصول می‌باشد. تغییر قیمت می‌تواند منجر به تغییر انتخاب مشتری شود. هدف از تعیین قیمت، پوشش هزینه‌ها نیست بلکه توصیف ارزش حاصل شده در ذهن مشتری است. بنابراین قیمت می‌تواند در جایی بین ارزش مشتری و هزینه محصول قرار بگیرد [۳۳].



شکل (۱): طیف قیمت [۳۳]

ارائه محصولات مکمل و جایگزین به‌صورت همزمان، فروش بسته‌ای و بسته‌بندی، تخفیف و قیمت‌گذاری فاکتورها و متغیرهایی هستند که با تنظیم صحیح آنها می‌توان به اهداف بنگاه دست پیدا کرد. مهم‌ترین نوآوری این تحقیق، بررسی و مدلسازی مسأله فروش محصولات مکمل و جایگزین با هدف بیشینه‌سازی سود است که برای اولین بار صورت گرفته است. این مسأله در سه حالت جدافروشی، فروش بسته‌ای بدون تخفیف و با استفاده از تخفیف مدلسازی شد. ارائه جواب بهینه جهانی برای مسأله در قالب سه قضیه و اثبات ریاضی هر قضیه، بیان سه سناریو به‌منظور دستیابی به اهداف بنگاه و الگوریتم‌های حل برای هر سناریو از نوآوری‌های اصلی این تحقیق به‌شمار می‌آید.

ساختار کلی مقاله به این صورت است که در بخش ۲ به بیان مسأله تحقیق و حالت‌های مسئله پرداخته می‌شود. در بخش ۳ سناریوهای مسأله بیان می‌گردد. در بخش ۴ برای روشن شدن نقش فروش بسته‌ای و تخفیف در سود مسأله عددی بیان می‌گردد. در بخش ۴ نتیجه‌گیری ارائه می‌شود و در بخش ۵ ضمایم مسأله که اثبات قضایا می‌باشد بیان می‌گردد. نهایتاً در بخش پایانی مراجع بیان می‌شود.

۲- بیان مسأله

در این مقاله مسأله فروش محصولات مکمل و جایگزین توسط یک فروشنده بررسی می‌شود. دو محصول مکمل و یک محصول جایگزین توسط یک فروشنده به فروش می‌رسد. تابع تقاضای هر محصول تحت تأثیر قیمت محصولات دیگر نیز می‌باشد. فروشنده قصد دارد با تنظیم قیمت محصولات و استفاده از سیاست فروش بسته‌ای و تخفیف سود خود را حداکثر نماید.

پارامترهای مساله

$d1[p1, p2, p3]$	تقاضای محصول ۱
$d2[p1, p2, p3]$	تقاضای محصول ۲
$d3[p1, p2, p3]$	تقاضای محصول ۳
$d4[p4, p5]$	تقاضای محصول ۱ و ۲ در حالت فروش بسته‌ای
$d5[p4, p5]$	تقاضای محصول ۳ در حالت فروش بسته‌ای
$p1$	قیمت فروش محصول ۱
$p2$	قیمت فروش محصول ۲
$p3$	قیمت فروش محصول ۳
$p4$	قیمت فروش محصول ۱ و ۲ در حالت فروش بسته‌ای
$p5$	قیمت فروش محصول ۳ در حالت فروش بسته‌ای
$Be[p1, p2, p3]$	تابع هدف مسأله در حالت فروش جداگانه
$\Pi1[p4, p5]$	تابع هدف مسأله در حالت فروش بسته‌ای
a	تقاضای محصول ۱ و ۲ در حالت قیمت محصولات صفر باشد.
$\alpha1$	ضریب حساسیت تقاضای محصول ۳ به قیمتش
ξ	ضریب حساسیت تقاضای محصول ۱ و ۲ به قیمت محصول ۳ در فروش بسته‌ای با تخفیف و بدون تخفیف
α	ضریب حساسیت تقاضای محصول ۱ و ۲ به قیمت این دو محصول
Θ	ضریب حساسیت تقاضای محصول ۱ و ۲ به قیمت محصول ۱و۲
Υ	ضریب حساسیت تقاضای محصول ۱ و ۲ به قیمت محصول ۳
ψ	ضریب حساسیت تقاضای محصول ۳ به قیمت محصول ۱و۲
λ	ضریب حساسیت تقاضای محصول بسته‌ای ۱و۲ به اختلاف قیمت حالت جدا فروشی و فروش بسته‌ای
Γ	ضریب حساسیت تقاضای محصول ۳ به قیمت فروش بسته‌ای محصول ۱ و ۲
$c1$	هزینه خرید محصول ۱
$c2$	هزینه خرید محصول ۲
$c3$	هزینه خرید محصول ۳
$\Pi2[p4, p5]$	تابع هدف مسأله در حالت فروش بسته‌ای با تخفیف

مفروضات مسأله

- محصولات ۱ و ۲ مکمل همدیگر هستند.
- محصول ۳ جایگزین محصول ۱ و ۲ می‌باشد.
- تقاضای هر محصول تابعی از قیمت خود و محصولات دیگر هست.
- قیمت هر محصول از هزینه خرید آن بیشتر است.

قبل از این‌که سناریوها توضیح داده شود سه حالت فروش تشریح می‌گردد.

حالت ۱: حالت جدافروشی

حالت ۲: فروش بسته ای

حالت ۳: بسته‌ای با تخفیف

۲-۱- حالت جدافروشی

منظور از جدافروشی حالتی است که فروشنده محصولات خود را به صورت جداگانه و به تفکیک به فروش می‌رساند. تابع تقاضای محصول ۱، ۲ و ۳ به‌صورت روابط (۱،۲و۳) نمایش داده شده است.

$$d1[p1, p2, p3] = a - p1\alpha - p2\Theta + p3\Upsilon \qquad (1)$$

$$d2[p1, p2, p3] = a - p2\alpha - p1\Theta + p3\Upsilon \qquad (2)$$

$$d3[p1, p2, p3] = b - \alpha1 p3 + \psi p1 + \psi p2 \qquad (3)$$

در تابع تقاضای محصول ۱و ۲، α ضریب حساسیت تقاضای این دو محصول به قیمتشان است که هر چه بالاتر باشد تأثیر بیشتری بر تقاضا دارد، یعنی به قیمت خود حساس‌تر است. پارامتر Θ، ضریب حساسیت تقاضای این دو محصول به قیمت محصول مکمل‌شان است و هر چه این مقدار بزرگ‌تر باشد بدین معنی است که قیمت محصول مکمل ۱ و ۲ بر روی تقاضای محصول ۱ و ۲ تأثیر بیشتری دارد، به‌عبارتی افزایش قیمت محصول مکمل منجر به کاهش تقاضای محصول و کاهش قیمت محصول مکمل باعث افزایش تقاضای محصول با سرعت بیشتری می‌شود.Υ، ضریب حساسیت تقاضای این دو محصول به قیمت محصول جایگزین‌شان است. هر چه این پارامتر بزرگ‌تر باشد، تقاضای این دو محصول به قیمت محصول جایگزین حساس‌تر است و با بالا رفتن قیمت محصول جایگزین، تقاضای محصول ۱ و۲ با سرعت بیشتری افزایش می‌یابد.

در تابع تقاضای محصول ۳، $\alpha1$، ضریب حساسیت تقاضای این محصول به قیمت خود محصول می‌باشد اگر این مقدار بزرگ‌تر باشد تقاضا به قیمت محصول ۳ حساس‌تر است. قیمت محصول ۳ که بالا رود تقاضا با شدت بیشتری کاهش می‌یابد و قیمت محصول ۳ که پایین بیاید تقاضای این محصول با شدت بیشتری بالا می‌رود. ψ، ضریب حساسیت تقاضای این محصول به قیمت محصول ۱و۲ است. این ضریب که بزرگ‌تر باشد تقاضای محصول ۳ به قیمت محصول ۱ و ۲ حساس‌تر است بدین معنی که قیمت دو محصول ۱ و ۲ بالا رود رشد تقاضای محصول ۳ با سرعت بیشتری افزایش می‌یابد و اگـر کاهش پیدا کند تقـاضا با سرعت کمتری کاهش می‌یابد.

اگر فروشنده سه محصول را به‌صورت جداگانه به فروش برساند، تابع کل سود سه محصول به‌صورت رابطه (۴) نوشته می‌شود.

$$\mathrm{Be}[\mathrm{p1},\mathrm{p2},\mathrm{p3}]=(\mathrm{p1}-\mathrm{c1})\mathrm{d1}[\mathrm{p1},\mathrm{p2},\mathrm{p3}]+(\mathrm{p2}-\mathrm{c2})\mathrm{d2}[\mathrm{p1},\mathrm{p2},\mathrm{p3}]+(\mathrm{p3}-\mathrm{c3})\mathrm{d3}[\mathrm{p1},\mathrm{p2},\mathrm{p3}]$$

$$\mathrm{Be}[\mathrm{p1},\mathrm{p2},\mathrm{p3}]=(-\mathrm{c2}+\mathrm{p2})(a-\mathrm{p2}\alpha-\mathrm{p1}\Theta+\mathrm{p3}\Upsilon)+(-\mathrm{c1}+\mathrm{p1})(a-\mathrm{p1}\alpha-\mathrm{p2}\Theta+\mathrm{p3}\Upsilon)+(-\mathrm{c3}+\mathrm{p3})(b-\mathrm{p3}\alpha1+(\mathrm{p1}+\mathrm{p2})\psi) \qquad (۴)$$

برای به‌دست آوردن مقدار بهینه حالت جدافروشی قضیه ۱ بیان می‌شود.

قضیه ۱: اگر رابطه $\alpha1<\frac{\Upsilon^2+2\Upsilon\psi+\psi^2}{2\alpha+2\Theta}$ برقرار باشد تابع سود دارای جواب بهینه به‌صورت زیر است.

$$\mathrm{p1}=(4a\alpha1+2b(\Upsilon+\psi)-(\Upsilon-\psi)(-2\mathrm{c3}\alpha1+\mathrm{c2}(\Upsilon+\psi))+\mathrm{c1}(4\alpha1(\alpha+\Theta)-(\Upsilon+\psi)(3\Upsilon+\psi)))/(8\alpha1(\alpha+\Theta)-4(\Upsilon+\psi)^2)$$
$$\mathrm{p2}=(4a\alpha1+2b(\Upsilon+\psi)-(\Upsilon-\psi)(-2\mathrm{c3}\alpha1+\mathrm{c1}(\Upsilon+\psi))+\mathrm{c2}(4\alpha1(\alpha+\Theta)-(\Upsilon+\psi)(3\Upsilon+\psi)))/(8\alpha1(\alpha+\Theta)-4(\Upsilon+\psi)^2) \qquad (۵)$$
$$\mathrm{p3}=(2b(\alpha+\Theta)-(\mathrm{c1}+\mathrm{c2})(\alpha+\Theta)(\Upsilon-\psi)+2a(\Upsilon+\psi)+2\mathrm{c3}(\alpha1(\alpha+\Theta)-\psi(\Upsilon+\psi)))/(4\alpha1(\alpha+\Theta)-2(\Upsilon+\psi)^2)$$

مقدار تقاضای هر محصول به‌صورت رابطه (۶) بیان می‌شود.

$$\mathrm{d1}[\mathrm{p1},\mathrm{p2},\mathrm{p3}]=\frac{1}{8\alpha1(\alpha+\Theta)-4(\Upsilon+\psi)^2}(-4\mathrm{c1}\alpha^2\alpha1-4\mathrm{c1}\alpha\alpha1\Theta-4\mathrm{c2}\alpha\alpha1\Theta-4\mathrm{c2}\alpha1\Theta^2+2\mathrm{c3}\alpha\alpha1\Upsilon+2\mathrm{c3}\alpha1\Theta\Upsilon+\mathrm{c1}\alpha\Upsilon^2-\mathrm{c2}\alpha\Upsilon^2-\mathrm{c1}\Theta\Upsilon^2+\mathrm{c2}\Theta\Upsilon^2+2(\mathrm{c3}\alpha1(\alpha+\Theta)+(3\mathrm{c1}\alpha+\mathrm{c2}\alpha+\mathrm{c1}\Theta+3\mathrm{c2}\Theta)\Upsilon-2\mathrm{c3}\Upsilon^2)\psi+((\mathrm{c1}-\mathrm{c2})(\alpha-\Theta)-4\mathrm{c3}\Upsilon)\psi^2+2a((\alpha+\Theta)(2\alpha1+\Upsilon)-(\alpha+\Theta+2\Upsilon)\psi-2\psi^2)) \qquad (۶)$$

$$\mathrm{d2}[\mathrm{p1},\mathrm{p2},\mathrm{p3}]=\frac{1}{8\alpha1(\alpha+\Theta)-4(\Upsilon+\psi)^2}(-4\mathrm{c2}\alpha^2\alpha1-4\mathrm{c1}\alpha\alpha1\Theta-4\mathrm{c2}\alpha\alpha1\Theta-4\mathrm{c1}\alpha1\Theta^2+2\mathrm{c3}\alpha\alpha1\Upsilon+2\mathrm{c3}\alpha1\Theta\Upsilon-\mathrm{c1}\alpha\Upsilon^2+\mathrm{c2}\alpha\Upsilon^2+\mathrm{c1}\Theta\Upsilon^2-\mathrm{c2}\Theta\Upsilon^2+2(\mathrm{c3}\alpha1(\alpha+\Theta)+(\mathrm{c1}\alpha+3\mathrm{c2}\alpha+3\mathrm{c1}\Theta+\mathrm{c2}\Theta)\Upsilon-2\mathrm{c3}\Upsilon^2)\psi+(-(\mathrm{c1}-\mathrm{c2})(\alpha-\Theta)-4\mathrm{c3}\Upsilon)\psi^2+2a((\alpha+\Theta)(2\alpha1+\Upsilon)-(\alpha+\Theta+2\Upsilon)\psi-2\psi^2))$$

$$\mathrm{d3}[\mathrm{p1},\mathrm{p2},\mathrm{p3}]=(-(\alpha1(\alpha+\Theta)-2\Upsilon\psi)(2\mathrm{c3}\alpha1-(\mathrm{c1}+\mathrm{c2})(\Upsilon+\psi))+2a(\alpha\alpha1+\alpha1(\Theta-\Upsilon+\psi)-\Upsilon(\Upsilon+\psi)))/(4\alpha1(\alpha+\Theta)-2(\Upsilon+\psi)^2)$$

مقدار بهینه تابع هدف به اندازه رابطه (۷) می‌باشد.

$$\mathrm{Be}[\mathrm{p1},\mathrm{p2},\mathrm{p3}]=\frac{1}{8(2\alpha1(\alpha+\Theta)-(\Upsilon+\psi)^2)}(8a^2\alpha1+4\mathrm{c1}^2\alpha^2\alpha1+4\mathrm{c2}^2\alpha^2\alpha1+4\mathrm{c3}^2\alpha\alpha1^2+4\mathrm{c1}^2\alpha\alpha1\Theta+8\mathrm{c1c2}\alpha\alpha1\Theta+4\mathrm{c2}^2\alpha\alpha1\Theta+4\mathrm{c3}^2\alpha1^2\Theta+8\mathrm{c1c2}\alpha1\Theta^2+4b^2(\alpha+\Theta)-4\mathrm{c1c3}\alpha\alpha1\Upsilon-4\mathrm{c2c3}\alpha\alpha1\Upsilon-4\mathrm{c1c3}\alpha1\Theta\Upsilon-4\mathrm{c2c3}\alpha1\Theta\Upsilon-\mathrm{c1}^2\alpha\Upsilon^2+2\mathrm{c1c2}\alpha\Upsilon^2-\mathrm{c2}^2\alpha\Upsilon^2+\mathrm{c1}^2\Theta\Upsilon^2-2\mathrm{c1c2}\Theta\Upsilon^2+\mathrm{c2}^2\Theta\Upsilon^2-2(2(\mathrm{c1}+\mathrm{c2})\mathrm{c3}\alpha1(\alpha+\Theta)+(4\mathrm{c3}^2\alpha1+\mathrm{c1}^2(3\alpha+\Theta)+\mathrm{c2}^2(3\alpha+\Theta)+2\mathrm{c1c2}(\alpha+3\Theta))\Upsilon-4(\mathrm{c1}+\mathrm{c2})\mathrm{c3}\Upsilon^2)\psi+(-(\mathrm{c1}-\mathrm{c2})^2(\alpha-\Theta)+8(\mathrm{c1}+\mathrm{c2})\mathrm{c3}\Upsilon)\psi^2+8a(-(\mathrm{c1}+\mathrm{c2})\alpha1(\alpha+\Theta)+\mathrm{c3}\alpha1\Upsilon+(-\mathrm{c3}\alpha1+(\mathrm{c1}+\mathrm{c2})\Upsilon)\psi+(\mathrm{c1}+\mathrm{c2})\psi^2)+4b(-(\mathrm{c1}+\mathrm{c2})(\alpha+\Theta)(\Upsilon-\psi)+2a(\Upsilon+\psi)+2\mathrm{c3}(-\alpha1(\alpha+\Theta)+\Upsilon(\Upsilon+\psi)))) \qquad (۷)$$

برای اثبات- به ضمیمه مراجعه شود.

۲-۲- فروش به‌صورت بسته بدون تخفیف

در این حالت فروشنده محصولات مکمل خود را به‌صورت بسته‌بندی و با هم به فروش می‌رساند. فروش بسته‌ای سیاستی برای افزایش سود و فروش بیشتر می‌باشد. فروش محصولات ۱و۲ به‌صورت بسته‌ای بر تقاضای محصول ۳ نیز تأثیر می‌گذارد. تقاضای محصولات در حالت بسته‌ای به‌صورت رابطه (۸) و مدل در این حالت به‌صورت رابطه (۹) بازنویسی می‌شود.

$$\mathrm{d4}[\mathrm{p4},\mathrm{p5}]=a-\mathrm{p4}\alpha+\mathrm{p5}\xi$$
$$\mathrm{d5}[\mathrm{p4},\mathrm{p5}]=b-\mathrm{p5}\alpha1+\mathrm{p4}\Gamma \qquad (۸)$$

در فروش بسته‌ای و تابع تقاضای بسته شامل محصول ۱ و ۲ پارامتر α، ضریب حساسیت تقاضای بسته دو محصول به قیمت دو محصول به‌صورت یکجا می‌باشد. هر چه این مقدار بزرگ‌تر باشد تقاضا به قیمت بسته حساس‌تر و هر چه پایین‌تر باشد به قیمت بسته کمتر حساس است. ξ، ضریب حساسیت تقاضای بسته به قیمت محصول ۳ می‌باشد. این مقدار اگر بالا باشد، تقاضای بسته حساس‌تر است زمانی‌که قیمت محصول ۳ بالا برود تقاضای بسته با سرعت بیشتری افزایش می‌یابد و زمانی‌که محصول ۳ پایین بیاید تقاضا برای خرید بسته با سرعت بیشتری کاهش می‌یابد.

برای تابع تقاضای محصول ۳ در فروش بسته، $\alpha1$، ضریب حساسیت تقاضای محصول ۳ به قیمتش در هنگام فروش بسته‌ای است که رفتار آن در قسمت قبل و در حالت جدافروشی توصیف شد. Γ، ضریب حساسیت تقاضای محصول ۳ به قیمت بسته می‌باشد. هر چه این پارامتر بالاتر باشد، تقاضای محصول ۳ بیشتر تحت تأثیر قیمت بسته است. اگر قیمت بسته بالا برود تقاضای محصول ۳ با شیب بیشتری افزایش و اگر قیمت بسته کاهش داشته باشد تقاضای محصول ۳ با شیب بیشتری کاهش می‌یابد.

تابع سود مسأله در این حالت به‌صورت رابطه (۹) است:

$$\begin{aligned}\Pi1[\mathrm{p4},\mathrm{p5}] = {} & (-\mathrm{c3}+\mathrm{p5})(b-\mathrm{p5}\alpha1+\mathrm{p4}\Gamma) + \\ & (-\mathrm{c1}-\mathrm{c2}+\mathrm{p4})(a-\mathrm{p4}\alpha+\mathrm{p5}\xi)\end{aligned} \tag{۹}$$

برای پاسخ به مقدار بهینه حالت فروش بسته‌ای بدون تخفیف قضیه ۲ ارائه می شود.

قضیه۲: اگر رابطه $\alpha1 < \frac{\Gamma^2+2\Gamma\xi+\xi^2}{4\alpha}$ برقرار باشد، جواب بهینه تابع (۹) به‌صورت زیر است.

قیمت بهینه محصولات به‌صورت رابطه(۱۰) بیان می‌گردد.

$$\begin{aligned}\mathrm{p4} = {} & -(-2\alpha1(a+(\mathrm{c1}+\mathrm{c2})\alpha-\mathrm{c3}\Gamma)+(\Gamma+\xi)(-b \\ & -\mathrm{c3}\alpha1+(\mathrm{c1}+\mathrm{c2})\xi))/(4\alpha\alpha1 \\ & -(\Gamma+\xi)\hat{}2) \\ \mathrm{p5} = {} & (2b\alpha+(\mathrm{c1}+\mathrm{c2})\alpha(\Gamma-\xi)+a(\Gamma+\xi) \\ & +\mathrm{c3}(2\alpha\alpha1-\Gamma(\Gamma+\xi)))/(4\alpha\alpha1 \\ & -〚(\Gamma+\xi)〛\hat{}2)\end{aligned} \tag{۱۰}$$

و مقدار تقاضای بهینه در این حالت برابر رابطه (۱۱) است.

$$\begin{aligned}\mathrm{d4}[\mathrm{p4},\mathrm{p5}] = {} & (\alpha(-2(\mathrm{c1}+\mathrm{c2})\alpha\alpha1-b\Gamma \\ & +\mathrm{c3}\alpha1\Gamma) \\ & +(b\alpha+\mathrm{c3}\alpha\alpha1 \\ & +2(\mathrm{c1}+\mathrm{c2})\alpha\Gamma-\mathrm{c3}\Gamma^2)\xi \\ & -\mathrm{c3}\Gamma\xi^2 \\ & +a\big(2\alpha\alpha1-\Gamma(\Gamma+\xi)\big)) \\ & /(4\alpha\alpha1-(\Gamma+\xi)^2) \\ \mathrm{d5}[\mathrm{p4},\mathrm{p5}] = {} & (\alpha1(2b\alpha-2\mathrm{c3}\alpha\alpha1 \\ & +(a+(\mathrm{c1}+\mathrm{c2})\alpha)\Gamma) \\ & -(a\alpha1-(\mathrm{c1}+\mathrm{c2})\alpha\alpha1 \\ & +(b-2\mathrm{c3}\alpha1)\Gamma \\ & +(\mathrm{c1}+\mathrm{c2})\Gamma^2)\xi \\ & -(b+(\mathrm{c1}+\mathrm{c2})\Gamma)\xi^2) \\ & /(4\alpha\alpha1-(\Gamma+\xi)^2)\end{aligned} \tag{۱۱}$$

مقدار تابع هدف به‌صورت رابطه (۱۲) تعیین می شود.

$$\begin{aligned}\Pi1[\mathrm{p4},\mathrm{p5}] = {} & \frac{1}{4\alpha\alpha1-(\Gamma+\xi)^2}(b^2\alpha+a^2\alpha1+(\alpha\alpha1 \\ & -\Gamma\xi)(\mathrm{c3}^2\alpha1+(\mathrm{c1}+\mathrm{c2})((\mathrm{c1} \\ & +\mathrm{c2})\alpha-\mathrm{c3}(\Gamma+\xi))) \\ & +a(\mathrm{c3}\alpha1(-\Gamma+\xi)+\mathrm{c1}(-2\alpha\alpha1 \\ & +\Gamma(\Gamma+\xi))+\mathrm{c2}(-2\alpha\alpha1+\Gamma(\Gamma \\ & +\xi)))+b((\mathrm{c1}+\mathrm{c2})\alpha(\Gamma-\xi) \\ & +a(\Gamma+\xi)+\mathrm{c3}(-2\alpha\alpha1+\xi(\Gamma \\ & +\xi))))\end{aligned} \tag{۱۲}$$

برای اثبات- به ضمیمه مراجعه شود.

۲-۳- فروش بسته ای در حالت تخفیف

در این حالت فروشنده هنگامی‌که محصول ۱و۲ را به‌صورت بسته‌ای به فروش می‌رساند تخفیفی برای مشتری قائل می‌شود و قیمت دو محصول را کمتر از مجموع دو قیمت به‌صورت جدافروشی به مشتری ارائه می‌کند. در این حالت تابع تقاضای محصولات به‌صورت رابطه (۱۳) نشان داده می‌شود. تابع تقاضای محصول ۱و۲ متأثر از کاهش قیمت است و نسبت به تخفیف در نظر گرفته شده حساس است.

$$\begin{aligned}&\mathrm{d4}[\mathrm{p4},\mathrm{p5}] = a-\mathrm{p4}\alpha+(\mathrm{p1}+\mathrm{p2}-\mathrm{p4})\lambda+\mathrm{p5}\xi \\ &\mathrm{d5}[\mathrm{p4},\mathrm{p5}] = b-\mathrm{p5}\alpha1+\mathrm{p4}\Gamma\end{aligned} \tag{۱۳}$$

در فروش بسته‌ای با تخفیف و تابع تقاضای محصول ۱و۲ به‌صورت بسته، λ ضریب حساسیت تقاضای بسته محصول۱و ۲ به میزان تخفیف است. هر چه این پارامتر بزرگ‌تر باشد به میزان تخفیف حساس‌تر است. یعنی اگر میزان تخفیف بالاتر رود تقاضای بسته با شیب بیشتری بالا می‌رود و هر چه میزان تخفیف کمتر شود تقاضا با سرعت کمتری کاهش می‌یابد.

مقدار تابع هدف برای فروش بسته‌ای با تخفیف به‌صورت رابطه (۱۴) بیان می‌شود.

$$\begin{aligned}\Pi[\mathrm{p4},\mathrm{p5}] = {} & (-\mathrm{c3}+\mathrm{p3})(b-\mathrm{p5}\alpha1+\mathrm{p4}\Gamma)+(-\mathrm{c1} \\ & -\mathrm{c2}+\mathrm{p4})(a-\mathrm{p4}\alpha+(\mathrm{p1}+\mathrm{p2} \\ & -\mathrm{p4})\lambda+\mathrm{p5}\xi)\end{aligned} \tag{۱۴}$$

برای به‌دست آوردن جواب بهینه فروش بسته‌ای با تخفیف قضیه ۳ بیان می‌شود.

قضیه ۳: اگر $\alpha1 < \frac{\Gamma^2+2\Gamma\xi+\xi^2}{4\alpha+4\lambda}$ برقرار باشد، مسأله دارای جواب بهینه است و جواب بهینه تابع هدف به‌صورت رابطه شماره (۱۵) است.

$$\begin{aligned}\mathrm{p4} = {} & -(-2\alpha1(a+(\mathrm{c1}+\mathrm{c2})\alpha-\mathrm{c3}\Gamma+(\mathrm{c1}+\mathrm{c2}+\mathrm{p1} \\ & +\mathrm{p2})\lambda)+(\Gamma+\xi)(-b-\mathrm{c3}\alpha1 \\ & +(\mathrm{c1}+\mathrm{c2})\xi))/(4\alpha1(\alpha+\lambda) \\ & -〚(\Gamma+\xi)〛\hat{}2) \\ \mathrm{p5} = {} & (2b(\alpha+\lambda)+\Gamma(a+(\mathrm{c1}+\mathrm{c2})\alpha+(\mathrm{c1}+\mathrm{c2}+\mathrm{p1} \\ & +\mathrm{p2})\lambda)+(a+(\mathrm{p1}+\mathrm{p2})\lambda-\mathrm{c1}(\alpha \\ & +\lambda)-\mathrm{c2}(\alpha+\lambda))\xi+\mathrm{c3}(2\alpha1(\alpha \\ & +\lambda)-\Gamma(\Gamma+\xi)))/(4\alpha1(\alpha+\lambda) \\ & -〚(\Gamma+\xi)〛\hat{}2)\end{aligned} \tag{۱۵}$$

و مقدار تقاضای بهینه در این حالت برابر رابطه (۱۶) می‌باشد

در این تحقیق مسأله برای دو محصول مکمل و یک محصول جایگزین مدلسازی و حل شده است. پیچیدگی مسأله در حالت‌هایی با تعداد محصولات بیشتر مانع از دست‌یابی به جواب بهینه جهانی و اثبات شرایط بهینگی و تحلیل مسأله می‌شد و در آن صورت می‌بایست از الگوریتم‌های غیردقیق مانند الگوریتم ژنتیک استفاده شود که با رویکرد تحلیلی این تحقیق در تضاد بود. علت دیگر انتخاب این تعداد محصول، رویکرد فروش بسته‌ایست که زمانی مطرح می‌شود که تعداد محصولات هر بسته محدود است و نمی‌توان تعداد زیادی محصول را در بسته قرارداد. در اکثر مقالاتی که در مورد فروش بسته‌ای است، بر روی دو محصول تمرکز دارد [۱۲،۲۰-۲۴]. مدل تعمیم یافته مسأله برای n محصول مکمل و جایگزین در ضمیمه بیان شده است.

$$\mathrm{d4[p4,p5]} = \frac{1}{4\alpha 1(\alpha+\lambda)-(\Gamma+\xi)^2}\Big(-2\mathrm{c2}\alpha^2\alpha 1 - b\alpha\Gamma + \mathrm{c3}\alpha\alpha 1\Gamma - 4\mathrm{c2}\alpha\alpha 1\lambda + 2\mathrm{p1}\alpha\alpha 1\lambda + 2\mathrm{p2}\alpha\alpha 1\lambda - b\Gamma\lambda + \mathrm{c3}\alpha 1\Gamma\lambda - \mathrm{p1}\Gamma^2\lambda - \mathrm{p2}\Gamma^2\lambda - 2\mathrm{c2}\alpha 1\lambda^2 + 2\mathrm{p1}\alpha 1\lambda^2 + 2\mathrm{p2}\alpha 1\lambda^2 + \Big(b(\alpha+\lambda) + \Gamma\big(-(\mathrm{p1}+\mathrm{p2})\lambda + 2\mathrm{c2}(\alpha+\lambda)\big) + \mathrm{c3}\big(-\Gamma^2+\alpha 1(\alpha+\lambda)\big)\Big)\xi - \mathrm{c3}\Gamma\xi^2 - 2\mathrm{c1}(\alpha+\lambda)(\alpha 1(\alpha+\lambda)-\Gamma\xi) + a\big(2\alpha 1(\alpha+\lambda)-\Gamma(\Gamma+\xi)\big)\Big) \quad (۱۶)$$

$$\mathrm{d5[p4,p5]} = (-\alpha 1\Gamma(a + (\mathrm{c1}+\mathrm{c2})\alpha + (\mathrm{c1}+\mathrm{c2}+\mathrm{p1}+\mathrm{p2})\lambda) + (a\alpha 1 - (\mathrm{c1}+\mathrm{c2})(\alpha\alpha 1 - \Gamma^2) + (-\mathrm{c1}-\mathrm{c2}+\mathrm{p1}+\mathrm{p2})\alpha 1\lambda)\xi + (\mathrm{c1}+\mathrm{c2})\Gamma\xi^2 + 2\mathrm{c3}\alpha 1(\alpha 1(\alpha+\lambda)-\Gamma\xi) + b(-2\alpha 1(\alpha+\lambda) + \xi(\Gamma+\xi)))/(-4\alpha 1(\alpha+\lambda) + (\Gamma+\xi)^2)$$

میزان تابع هدف برابر با رابطه (۱۷)است.

$$\Pi 2\mathrm{[p4,p5]} = (-\alpha 1\Gamma(a + (\mathrm{c1}+\mathrm{c2})\alpha + (\mathrm{c1}+\mathrm{c2}+\mathrm{p1}+\mathrm{p2})\lambda) + (a\alpha 1 - (\mathrm{c1}+\mathrm{c2})(\alpha\alpha 1 - \Gamma\verb|^|2\,) + (-\mathrm{c1}-\mathrm{c2}+\mathrm{p1}+\mathrm{p2})\alpha 1\lambda)\xi + (\mathrm{c1}+\mathrm{c2})\Gamma\xi\verb|^|2 + 2\mathrm{c3}\alpha 1(\alpha 1(\alpha+\lambda) - \Gamma\xi) + b(-2\alpha 1(\alpha+\lambda) + \xi(\Gamma+\xi)\,))/(-4\alpha 1(\alpha+\lambda) + (\Gamma+\xi)\verb|^|2) \quad (۱۷)$$

برای اثبات- به ضمیمه مراجعه شود.

پس از بیان حالت هایی که فروشنده برای فروش محصولات خود انتخاب می‌کند، به بیان سناریوها و سیاست‌های که فروشنده برای فروش استفاده می‌کند پرداخته می‌شود.

۳- سناریوهای فروش

در این مسأله فروشنده با سه سناریو مواجه است که در ادامه به آن اشاره می‌گردد.

۳-۱- سناریوی اول:

مشتریان هنگام خرید محصولات مکمل، بیشتر زمان خود را صرف پیدا کردن محصول مکمل خواهند کرد و اکثر مشتریان ترجیح می‌دهند محصولات مکمل را در یک مکان تهیه کنند و مطالعات گذشته نیز نشان می‌دهد مشتریان حاضرند محصولات مکمل را حتی با قیمت بالاتر تهیه نمایند. در این سناریو فروشنده دو محصول مکمل به‌همراه محصول جایگزینش را به فروش می‌رساند و در شرایطی که سود بیشتری کسب نماید، تمایل دارد به‌صورت بسته‌ای به فروش برساند.

برای پاسخ به اینکه فروشنده در چه حالتی از فروش بسته‌ای استفاده نماید و چه زمانی دارای حداکثر سود می‌باشد مسأله را مدلسازی ریاضی می‌نماییم و مدل به‌صورت رابطه (۱۷) بیان می‌گردد.

$$\mathrm{MAX}\quad X\quad \mathrm{Be[p1,p2,p3]} + (1-X)\quad \Pi 1\mathrm{[p4,p5]} \qquad (۱۸)$$
$$X \in \{0,1\}$$

مقدار متغیر X برابر ۱ تعریف می‌شود اگر از فروش بسته‌ای استفاده شود و در صورتی‌که برابر صفر باشد، فروشنده سیاست جدافروشی را انتخاب می‌کند.

برای حل تابع هدف سناریوی اول، پاسخ را طبق قضیه ۱ و ۲ محاسبه می‌کنیم. اگر مقدار تابع هدف طبق قضیه ۱ بیشتر باشد فروشنده حالت جدافروشی را انتخاب می‌کند و در غیر این صورت سیاست فروش بسته‌ای را انتخاب می‌کند.

۳-۲- سناریوی ۲

در این سناریو فروشنده می‌تواند بین فروش بسته‌ای با تخفیف و جدافروشی یکی را انتخاب کند. در حالت تخفیف قیمت محصول ۱و۲ در حالت بسته‌ای کمتر از مجموع قیمت دو محصول می‌باشد. قیمت محصول جایگزین نیز در حالت فروش بسته‌ای با تخفیف متفاوت از حالت جدافروشی است. فروشنده برای حالت فروش بسته‌ای مقداری تخفیف را به‌عنوان حداقل تخفیف در نظر می‌گیرد و زمانی این سیاست فروش انتخاب می‌شود که سود بیشتری کسب نماید. هدف این سناریو جذب مشتری و کسب اعتبار و بیشینه‌سازی سود از طریق فروش بیشتر است.

مدلسازی این سناریو به‌صورت رابطه (۱۸) بیان می‌شود.

$$\mathrm{MAX}\quad \mathrm{Be[p1,p2,p3]} + (1-X)\Pi 1\mathrm{[p4,p5]} \qquad (۱۹)$$
$$\mathrm{P4} < P1 + P2$$
$$X \in \{0,1\}$$

برای حل رابطه (۱۸) الگوریتم زیر پیشنهاد می‌شود.

الگوریتم حل:

۱. با استفاده از قضیه ۱ مقدار $(p1, p2\ , p3)$ و مقدار تابع$\mathrm{Be[p1,p2,p3]}$ را محاسبه می‌کنیم.

۲. با جایگزینی $(p1, p2)$ تقاضای فروش بسته‌ای محصول ۱و ۲ را محاسبه می‌کنیم.

۳. محاسبه $(p4, p5)$ از قضیه ۳ و محاسبه تابع هدف$\Pi 2\mathrm{[p4,p5]}$

۴. اگر تابع هدف مرحله ۳ از مرحله ۱ بزرگ‌تر است به مرحله بعد برو و در غیر این صورت سود مسأله در حالت جدافروشی بیشتر است و حالت جدافروشی انتخاب می گردد.

۵. اگر رابطه $P4 < P1 + P2$ برقرار است به جواب بهینه دست یافته‌ایم و پایان و در غیر این صورت مرحله بعد.

۶. $p4 = p1 + p2 - \nabla$ و تابع هدف$\Pi 2\mathrm{[p4,p5]}$ را حساب می‌کنیم.

در اینجا ∇ میزان تخفیفی است که فروشنده برای مشتری در نظر می‌گیرد حداکثر مقداری که این پارامتر می‌تواند داشته باشد که تابع هدف مثبت بماند.

۱. از رابطه $\frac{d\Pi2[\mathrm{p4,p5}]}{dp5}=0$ متغیر $p5$ را محاسبه می‌کنیم و $\Pi2[\mathrm{p4,p5}]$ را محاسبه می‌کنیم.

۲. اگر مقدار تابع هدف مرحله ۷ مثبت است برو به مرحله بعد در غیر این صورت فروش بسته‌ای با تخفیف ضرر ده است و فروشنده جدافروشی را انتخاب می‌کند.

۳. اگر مقدار $\Pi2[\mathrm{p4,p5}]$ بزرگ‌تر و یا برابر مقدار $\mathrm{Be[p1,p2,p3]}$ باشد فروش بسته‌ای با تخفیف انتخاب می‌شود و در غیر این صورت فروشنده جدافروشی را انتخاب می‌کند.

۴. پایان

۳-۳- سناریوی ۳

در این سناریو فروشنده با هدف جذب مشتری و فروش بیشتر تا زمانی که متضرر نشود سیاست فروش بسته‌ای با تخفیف را انتخاب می‌کند. در این سناریو مدل به شکل زیر بازنویسی می‌شود.

$$\begin{aligned}&\mathrm{MAX}\quad \Pi2[\mathrm{p4,p5}]\\&P4<P1+P2\end{aligned}\tag{۲۰}$$

برای حل مدل این سناریو از الگوریتم زیر بهره می‌گیریم.

الگوریتم حل:

۱. با استفاده از قضیه ۱ مقدار $(p1,p2\ ,p3)$ را محاسبه می‌کنیم.

۲. با جایگزینی $(p1,p2)$ تقاضای فروش بسته ای محصول ۱و ۲ را محاسبه می‌کنیم.

۳. محاسبه $(p4,p5)$ و محاسبه تابع هدف $\Pi2[\mathrm{p4,p5}]$ از قضیه ۳

۴. اگر تابع هدف مرحله ۳ مثبت باشد به مرحله بعد برو و در غیر این صورت مسأله جواب ندارد.

۵. اگر رابطه $P4<P1+P2$ برقرار است به جواب بهینه دست یافته‌ایم و پایان و در غیر این صورت مرحله بعد.

۶. $p4=p1+p2-\nabla$ و تابع هدف $\Pi2[\mathrm{p4,p5}]$ را حساب می‌کنیم.

در اینجا ∇میزان تخفیفی است که فروشنده برای مشتری در نظر می گیرد حداکثر مقداری که این پارامتر می‌تواند داشته باشد که تابع هدف مثبت بماند.

۱. از رابطه $\frac{d\Pi2[\mathrm{p4,p5}]}{dp5}=0$ متغیر $p5$ را محاسبه می‌کنیم و $\Pi2[\mathrm{p4,p5}]$ را محاسبه می‌کنیم.

۲. اگر مقدار تابع هدف مرحله ۷ مثبت است به جواب رسیده‌ایم و در غیر این صورت مسأله جواب ندارد.

۳. پایان

اضافه شدن محدودیت $P4<P1+P2$ به مسأله، مدل را نسبت به تابع بیان شده در قضیه ۳ پیچیده‌تر می‌کند و در این‌گونه موارد از روش‌های مانند لاگرانژین استفاده می‌شود. الگوریتم ارائه شده در این سناریو، روش‌حل ساده‌ای را بر اساس نتایج حاصل شده در قضیه ۳ برای حل مسأله بیان می‌کند که از حل پیچیده اجتناب می‌ورزد.

۴- مثال عددی

فرض کنید فروشنده سه محصول را به فروش می‌رساند که محصول ۱و۲ مکمل همدیگر هستند و محصول ۳ جایگزین محصول ۱ و ۲ است. تابع تقاضای محصولات در حالت‌های جدا فروشی، فروش بسته‌ای بدون تخفیف و فروش بسته‌ای با تخفیف به‌صورت زیر بیان شده است. همچنین هزینه خرید محصول ۱ برابر ۵۰ واحد پولی، محصول ۲ برابر ۴۰ واحد پولی و محصول ۳ برابر ۸۰ واحد پولی است. مسأله برای سناریوهای مختلف بررسی شود و سود حاصله به چه میزان است.

تقاضای محصولات در حالت جدافروشی

$$d1[\mathrm{p1,p2,p3}]=1000-10\mathrm{p1}-5\mathrm{p2}+3\mathrm{p3}$$
$$d2[\mathrm{p1,p2,p3}]=1000-5\mathrm{p1}-10\mathrm{p2}+3\mathrm{p3}$$
$$d3[\mathrm{p1,p2,p3}]=1000+3\mathrm{p1}+3\mathrm{p2}-4\mathrm{p3}$$

تقاضای محصولات در حالت فروش بسته‌ای بدون تخفیف

$$d4[\mathrm{p4,p5}]=1000-10\mathrm{p4}+2\mathrm{p5}$$
$$d5[\mathrm{p4,p5}]=1000+6\mathrm{p4}-4\mathrm{p5}$$

تقاضای محصولات در حالت فروش بسته‌ای با تخفیف

$$d4[\mathrm{p4,p5}]=1000-10\mathrm{p4}+(\mathrm{p1}+\mathrm{p2}-\mathrm{p4})*10+2\mathrm{p5}$$
$$d5[\mathrm{p4,p5}]=1000+6\mathrm{p4}-4\mathrm{p5}$$

مدل سود در حالت جدافروشی

$$\begin{aligned}Be[p1,p2,p3]=-170000+1460\mathrm{p1}-10\mathrm{p1}^2+1410\mathrm{p2}\\-10\mathrm{p1p2}-10\mathrm{p2}^2+1050\mathrm{p3}+6\mathrm{p1p3}\\+6\mathrm{p2p3}-4\mathrm{p3}^2\end{aligned}$$

مدل سود فروش بسته‌ای بدون تخفیف

$$\begin{aligned}\Pi1[\mathrm{p4,p5}]=-170000+1420\mathrm{p4}-10\mathrm{p4}^2+1140\mathrm{p5}+8\mathrm{p4p5}\\-4\mathrm{p5}^2\end{aligned}$$

مدل سود فروش بسته‌ای با تخفیف

$$\begin{aligned}\Pi2[\mathrm{p4,p5}]=-360500+\frac{13310\mathrm{p4}}{3}-20\mathrm{p4}^2+1140\mathrm{p5}+8\mathrm{p4p5}\\-4\mathrm{p5}^2\end{aligned}$$

ماتریس هشین هر سه مدل معین منفی است در نتیجه هر سه مدل مقعرموکد هستند و دارای جواب بیشینه یگانه (مطابق جدول ۱) می‌باشند.

در سناریوی اول که فروشنده محصولات خود را به‌صورت دسته‌ای و بدون تخفیف به فروش می‌رساند سودی معادل با 184291.66 واحد پولی کسب می‌کند. پاسخ سناریوی دوم و سوم فروش محصولات به صورت دسته ای با تخفیف است و سودی معادل 206650.17 واحد پولی کسب می‌کند.

پس از بررسی پاسخ مسأله، مشاهده می‌شود که

۱. در حالت تخفیف با وجود اینکه قیمت محصولات کمتر از حالت جدافروشی است اما سود بیشتری نصیب فروشنده می‌شود و این برای این است در حالت تخفیف تقاضای خرید محصولات اضافه می‌گردد و فروش بیشتر منجر به سود بیشتری برای فروشنده می‌شود.

۲. مسأله نسبت به ضریبλ (ضریب حساسیت تقاضای محصول بسته‌ای ۱و۲ به اختلاف قیمت حالت جدافروشی و فروش بسته‌ای) دارای حساسیت بالایی است که مسأله فروش بسته‌ای دارای رابطه مستقیمی با این ضریب است و هر چه بیشتر باشد مسأله دارای سود بیشتری است. زمانی که

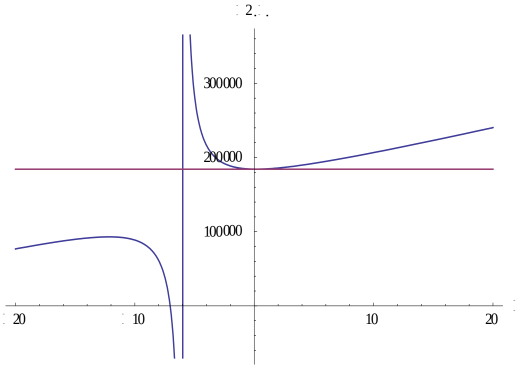
$\lambda = 0.3298$ سود جداافروشی و سود فروش بسته‌ای با تخفیف برابر است.

تابع و نمودار سود نسبت به ضریب λ به‌صورت نمودار زیر است.

$$\Pi[\lambda] = -88775 - 19050\lambda - \frac{9830400}{(6+\lambda)^2} - \frac{3955200\lambda}{(6+\lambda)^2} - \frac{1045275\lambda^2}{2(6+\lambda)^2} - \frac{819025\lambda^3}{36(6+\lambda)^2} + \frac{3276800}{6+\lambda} + \frac{2316800\lambda}{3(6+\lambda)} + \frac{819025\lambda^2}{18(6+\lambda)}$$

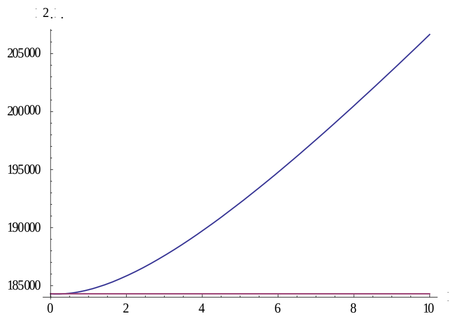
جدول (۱): خلاصه نتایج بررسی سه مدل

	مدل جداافروشی (قضیه ۱)	مدل فروش بسته‌ای بدون تخفیف (قضیه ۲)	مدل فروش بسته‌ای با تخفیف (قضیه ۳)
ماتریس هشین	$\begin{bmatrix} -20 & -10 & 6 \\ -10 & -20 & 6 \\ 6 & 6 & -8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -20 & 8 \\ 8 & -8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -40 & 8 \\ 8 & -8 \end{bmatrix}$
مقادیر بردار ویژه	$(-19-\sqrt{193}, -10, \sqrt{193}-19)$	$(-24, -4)$	$(8(-3-\sqrt{5}), 8(-3+\sqrt{5}))$
وضعیت مقادیر ویژه	منفی	منفی	منفی
نوع ماتریس	معین منفی	معین منفی	معین منفی
مقدار بهینه متغییرها	$(p1 \to \frac{325}{3}, p2 \to \frac{310}{3}, p3 \to 290)$	$(p4 \to \frac{640}{3}, p5 \to \frac{2135}{6})$	$(p4 \to \frac{8365}{48}, p5 \to \frac{15205}{48})$
مقدار تابع هدف	**134183.33**	**184291.66**	**206650.17**



شکل (۲): نمودار تابع سود بر حسب λ

محور افقی λ و محور عمودی تابع سود می باشد. از آنجایی‌که مقدار λ همواره مثبت است. نمودار به‌صورت شکل ۲ تبدیل می‌گردد.



شکل (۳): نمودار تابع سود بر حسب λ های مثبت

تابع سود در حالت فروش بسته‌ای با تخفیف تحت تأثیر مستقیم مقدار تخفیف است. در این قسمت برای نشان دادن تأثیر مقدار تخفیف در میزان سود، میزان تخفیف را به‌عنوان یک متغییر در نظر می‌گیریم و تابع سود فروشنده را در فروش بسته‌ای با تخفیف محاسبه می‌کنیم.

$$d4[p4, p5] = 1000 - 10p4 + 2p5 + 10\nabla$$
$$d5[p4, p5] = 1000 + 6p4 - 4p5$$
$$\Pi2[p4, p5] = (1000 + 6p4 - 4p5)(-80 + p5) + (-90 + p4)(1000 - 10p4 + 2p5 + 10\nabla)$$

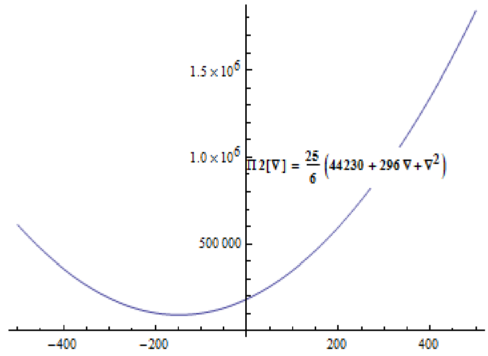
به کمک قضیه ۳ مقادیر بهینه p4 و p5 به‌دست می‌آید.

$$p4 = \frac{5(256+\nabla)}{6}$$
$$p5 = \frac{2135}{6} + \frac{5\nabla}{6}$$

با جایگزینی قیمت در تابع سود، مقدار تابع سود براساس مقدار تخفیف به‌صورت ذیل به‌دست می‌آید.

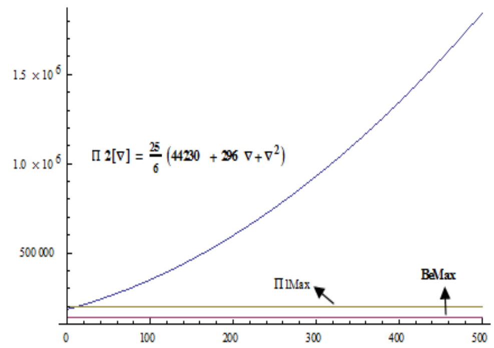
$$\Pi2[\nabla] = \frac{25}{6}\left(44230 + 296\nabla + \nabla^2\right)$$

مقدار تابع سود براساس مقدار تخفیف به صورت شکل (۴) ترسیم می‌شود.



شکل (۴): نمودار تابع سود بر حسب مقدار تخفیف

مقدار تخفیف همواره مثبت است. پس نمودار در قسمت منفی بی‌معنی است. برای نشان دادن تأثیر تخفیف در تابع سود و مقایسه با دو حالت جدافروشی و فروش بسته‌ای بدون تخفیف، مقدار بهینه مثال عددی در دو حالت مذکور و حالت فروش بسته‌ای با تخفیف را در یک نمودار ترسیم می‌کنیم.



شکل (۵): نمودار سود در حالت جدافروشی، بسته‌ای با تخفیف و بدون تخفیف

نتایج این مثال عددی نشان می‌دهد که مقدار تخفیف که بیشتر می‌شود، تقاضای دو محصول بالا می‌رود و میزان سود فروشنده بیشتر خواهد شد.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، فروش محصولات مکمل و جایگزین به‌صورت همزمان توسط یک فروشنده بررسی شد. در فروش بسته‌ای با تخفیف قیمت محصولات از حالت جدافروشی کمتر است ولی به‌دلیل افزایش فروش سود بیشتری حاصل می‌شود. برای بررسی مسأله سه قضیه اساسی بیان شد که مسأله را در سه حالت جدافروشی، فروش بسته‌ای بدون تخفیف و فروش بسته‌ای با تخفیف مدل نمود. مقادیر بهینه قیمت و میزان تابع هدف برای هر سه حالت ارائه شد. مسأله در سه سناریو بررسی شد و برای رسیدن به جواب بهینه هر سناریو الگوریتمی ارائه شد. در پایان برای نشان دادن تأثیر فروش بسته ای در حالت تخفیف و بدون تخفیف مثال عددی ارائه شد. جواب مسئله نشان داد که قیمت فروش در حالت فروش بسته‌ای با تخفیف کمتر از حالت بدون تخفیف و فروش بسته‌ای است ولی سود فروشنده در این حالت بیشتر از حالات دیگر است. کاهش قیمت منجر به استقبال بیشتر فروشندگان و افزایش تقاضای محصولات می‌شود و افزایش فروش نیز منجر به افزایش سود فروشنده می‌شود.

بررسی تأثیر تبلیغات، زنجیره تأمین چند سطحی و رویکرد الگوریتم‌های تقریبی در مدل تعمیم یافته محصولات مکمل و جایگزین از شکاف‌های مطالعاتی شناسایی شده است که برای تحقیقات آتی پیشنهاد می‌شود.

مراجع

[1] Cao, P., Li, J. and H. Yan. (2012). Optimal dynamic pricing of inventories with stochastic demand and discounted criterion. European Journal of Operational Research, 217 (3): 9.

[2] Choi, T. (2007). Pre-season stocking and pricing decisions for fashion retailers with multiple information updating. International Journal of Production Economics, 106 (1): 25.

[3] Kuo, C., Huang , K. (2012). Dynamic pricing of limited inventories for multi-generation products. European Journal of Operational Research, 217(2): 8.

[4] Seyed Esfahani, M.M., Biazaran, M., Gharakhani, M. (2011). A game theoretic approach to coordinate pricing and vertical co-op advertising in manufacturer-retailer supply chains. European Journal of Operational Research, 211 (2): 11.

[5] Tang, C., Yin, R. (2007). Joint ordering and pricing strategies for managing substitutable products. Production and Operations Management, 16 (1): 16.

[6] Wu, C.H., Chen, C.W., Hsieh C.C. (2012). Competitive pricing decisions in a two-echelon supply chain with horizontal and vertical competition. International Journal of Production Economics, 135 (1): 10.

[7] Soon, W. (2011). A review of multi-product pricing models. Applied Mathematics and Computation, 217 (21): 16.

[8] Cai, G., Zhang, Z., Zhang, M. (2009). Game theoretical perspectives on dual channel supply chain competition with price discounts and pricing schemes. International Journal of Production Economics, 117 (1): 17.

[9] Cao, P., Li, J., Yan, H. (2012). Optimal dynamic pricing of inventories with stochastic demand and discounted criterion. European Journal of Operational Research, 217 (3): 9.

[10] Wagner, S.M. Friedl, G. (2007). Supplier switching decisions. European Journal of Operational Research,183 (2): 18.

[11] Xia, Y., Chen, B., Kouvelis, P. (2008). Market-based supply chain coordination by matching suppliers' cost structure with buyers' order profile. Management Science, 54(11): 25.

[12] Yue, X., Mukhopadhyay, S., Zhu, X. (2006). A Bertrand model of pricing of complementary goods under information asymmetry. Journal of Business Research, 59 (10): 11.

[13] Estelami, H. (1999). Consumer savings in complementary product bundles. Journal of Marketing Theory and Practice, 7(3): 8.

[14] VenkateshMahajan, R. (1993). A probabilistic approach to pricing a bundle of products or services. Journal of Marketing Research, 1993. 30 (11): 13.

[15] Venkatesh, R. and Kamakura, Optimal bundling and pricing under a monopoly contrasting complements and substitutes

from independently valued products. Journal of Business, 2003. 76(2): 21.

[16] Arora, R. (2008). Price bundling and framing strategies for complementary products. Journal of Product and Brand Management, 17 (7): 10.

[17] Hanson, W., Martin R.K. (1990). Optimal bundle pricing. Management Science, 36(2): 20.

[18] Chuang, J.C. Sirbu, M.A. (1999). Optimal bundling strategy for digital information goods: network delivery of articles and subscriptions. Information Economics and Policy, 11 (2): 30.

[19] Wappling, A., Strugnell, C., Farley, H. (2010). Product bundling strategies in Swedish markets: links to business orientation and perceived effects on consumer influence. International Journal of Consumer Studies, 34: 9.

[20] Yan, R., Bandyopadhyay, S. (2011). The profit benefits of bundle pricing of complementary products. Journal of Retailing and Consumer Services, 18 :7.

[21] Gabszewicz, J., Sonnac N., Wauthy, X. (2001). On price competition with complementary goods. Economics Letters, 70(3): 7.

[22] Mukhopadhyay, S., Yue, X., Zhu, X. (2011). A Stackelberg model of pricing of complementary goods under information asymmetr .International Journal of Production Economics , 134(2): 10.

[23] Yue, X., et al. (2006). A Bertrand model of pricing of complementary goods under information asymmetry. Journal of Business Research, 59:11.

[24] Wei, J., Zhao, J., Y. Li (2013). Pricing decisions for complementary products with firms’ different market powers. European Journal of Operational Research, 224: 13.

[25] Rasouli, N., Kamalabadi, I.N. (2014). Joint Pricing and Inventory Control for Seasonal and Substitutable Goods Mentioning the Symmetrical and Asymmetrical Substitution International Journal of Engineering, 27(9): 8.

[26] Aviv, Y. Pazgal, A. (2008). Optimal pricing of seasonal products in the presence of forward-looking consumers and prospects. Journal of Manufacturing and Service Operations Management,10: 21.

[27] You, P., Chen, T.C. (2007). Dynamic pricing of seasonal goods with spot and forward purchase demands. Computers & Mathematics with Applications, 54(4): 9.

[28] Soysal, G.P. Krishnamurthi, L., (2012). Demand dynamics in the seasonal goods industry: An empirical analysis. Marketing Science, 31(2): 24.

[29] Zhao, J., Tang, W., Wei, (2012) J., Pricing decision for substitutable products with retail competition in a fuzzy environment. Int. J. Production Economics, 135: 10.

[30] Hsieh, C.C. and Wu, C.H. (2009). Coordinated decisions for substitutable products in a common retailer supply chain. European Journal of Operational Research, 196 (1): 16.

[31] Yao, Z., Leung, S.C., Lai, K. (2008). Manufacturer’s revenue-sharing contract and retail competition. European Journal of Operational Research, 186 (2): 15.

[32] Gurler, U., Yılmaz. A. (2010). Inventory and coordination issues with two substitutable products. Applied Mathematical Modelling, 34: 13.

[33] Bernstein, J., Macias, D. (2002). Engineering New-Product Success. The New-Product Pricing Process at Emerson. Industrial Marketing Management, 31(1): 14.

۶- ضمایم

۶-۱- اثبات قضیه ۱:

شرط لازم برای اینکه نقطه $(p1,p2,p3)$، نقطه ماکسیمم تابع $\mathrm{Be}[p1,p2,p3]$ باشد این است در اطراف نقطه بهینه تابع پیوسته و مشتق پذیر باشد و همچنین $\nabla \mathrm{Be}[p1,p2,p3]=0$ باشد. که این شرط برقرار است.

برای بدست آوردن نقطه بهینه گرادیان تابع بالا را برابر صفر قرار دهیم و از حل دستگاه سه معادله و سه مجهول مقدار $(p1,p2,p3)$ برابر می شود با

$$p1=(4a\alpha1+2b(\Upsilon+\psi)-(\Upsilon-\psi)(-2c3\alpha1+c2(\Upsilon+\psi))+c1(4\alpha1(\alpha+\Theta)-(\Upsilon+\psi)(3\Upsilon+\psi)))/(8\alpha1(\alpha+\Theta)-4(\Upsilon+\psi)^2)$$

$$p2=(4a\alpha1+2b(\Upsilon+\psi)-(\Upsilon-\psi)(-2c3\alpha1+c1(\Upsilon+\psi))+c2(4\alpha1(\alpha+\Theta)-(\Upsilon+\psi)(3\Upsilon+\psi)))/(8\alpha1(\alpha+\Theta)-4(\Upsilon+\psi)^2)$$

$$p3=(2b(\alpha+\Theta)-(c1+c2)(\alpha+\Theta)(\Upsilon-\psi)+2a(\Upsilon+\psi)+2c3(\alpha1(\alpha+\Theta)-\psi(\Upsilon+\psi)))/(4\alpha1(\alpha+\Theta)-2(\Upsilon+\psi)^2)$$

و مقدار تابع در نقطه $(p1,p2,p3)$ برابر است با

$$Be[p1,p2,p3]=\frac{1}{8(2\alpha1(\alpha+\Theta)-(\Upsilon+\psi)^2)}\Big(8a^2\alpha1+4c1^2\alpha^2\alpha1+4c2^2\alpha^2\alpha1+4c3^2\alpha\alpha1^2+4c1^2\alpha\alpha1\Theta+8c1c2\alpha\alpha1\Theta+4c2^2\alpha\alpha1\Theta+4c3^2\alpha1^2\Theta+8c1c2\alpha1\Theta^2+4b^2(\alpha+\Theta)-4c1c3\alpha\alpha1\Upsilon-4c2c3\alpha\alpha1\Upsilon-4c1c3\alpha1\Theta\Upsilon-4c2c3\alpha1\Theta\Upsilon-c1^2\alpha\Upsilon^2+2c1c2\alpha\Upsilon^2-c2^2\alpha\Upsilon^2+c1^2\Theta\Upsilon^2-2c1c2\Theta\Upsilon^2+c2^2\Theta\Upsilon^2-2\big(2(c1+c2)c3\alpha1(\alpha+\Theta)+\big(4c3^2\alpha1+c1^2(3\alpha+\Theta)+c2^2(3\alpha+\Theta)+2c1c2(\alpha+3\Theta)\big)\Upsilon-4(c1+c2)c3\Upsilon^2\big)\psi+(-(c1-c2)^2(\alpha-\Theta)+8(c1+c2)c3\Upsilon)\psi^2+8a(-(c1+c2)\alpha1(\alpha+\Theta)+c3\alpha1\Upsilon+(-c3\alpha1+(c1+c2)\Upsilon)\psi+(c1+c2)\psi^2)+4b\left(-(c1+c2)(\alpha+\Theta)(\Upsilon-\psi)+2a(\Upsilon+\psi)+2c3\big(-\alpha1(\alpha+\Theta)+\Upsilon(\Upsilon+\psi)\big)\right)\Big)$$

شرط کافی برای اینکه نقطه $(p1,p2,p3)$ نقطه ماکسیمم باشد این است که ماتریس هشین معین منفی باشد. یکی از را ه های اثبات معین منفی بودن ماتریس هشین این است که کلیه مقادیر ویژه ماتریس هشین منفی باشد. ماتریس هشین تابع به صورت رابطه زیر تعریف می شود.

$$\frac{\partial^2 \mathrm{Be}}{\partial\{\mathrm{p1,p2,p3}\}^2}=\begin{bmatrix}-2\alpha & -2\Theta & \Upsilon+\psi\\ -2\Theta & -2\alpha & \Upsilon+\psi\\ \Upsilon+\psi & \Upsilon+\psi & -2\alpha1\end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه ماتریس هشین برابر است با

$$\begin{bmatrix}-2(\alpha-\Theta)\\ -\alpha-\alpha1-\Theta-\sqrt{\alpha^2-2\alpha\alpha1+\alpha1^2+2\alpha\Theta-2\alpha1\Theta+\Theta^2+2\Upsilon^2+4\Upsilon\psi+2\psi^2}\\ -\alpha-\alpha1-\Theta+\sqrt{\alpha^2-2\alpha\alpha1+\alpha1^2+2\alpha\Theta-2\alpha1\Theta+\Theta^2+2\Upsilon^2+4\Upsilon\psi+2\psi^2}\end{bmatrix}<\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

با حل سه نامعادله بالا ربطه زیر حاصل می شود.

$$\alpha1>\frac{\Upsilon^2+2\Upsilon\psi+\psi^2}{2\alpha+2\Theta}$$

پس اگر رابطه بالا برقرار باشد تابع هدف در نقطه $(p1,p2,p3)$ دارای مقدار ماکسیمم می باشد.

۶-۲- اثبات قضیه ۲:

شرط لازم برای اینکه نقطه $(p4,p5)$، نقطه ماکسیمم تابع $\Pi1[p4,p5]$ باشد این است در اطراف نقطه پیوسته و مشتق پذیر باشد و همچنین $\nabla\Pi1[p4,p5]=0$ باشد،که این شرط برقرار است. اگر گرادیان تابع بالا را برابر صفر قرار دهیم از حل دستگاه دو معادله و دو مجهول مقدار $(p4,p5)$ برابر می شود با

$$p4=-(-2\alpha1(a+(c1+c2)\alpha-c3\Gamma)+(\Gamma+\xi)(-b-c3\alpha1+(c1+c2)\xi))/(4\alpha\alpha1-(\Gamma+\xi)^2)$$

$$p5=\frac{2b\alpha+(c1+c2)\alpha(\Gamma-\xi)+a(\Gamma+\xi)+c3(2\alpha\alpha1-\Gamma(\Gamma+\xi))}{4\alpha\alpha1-(\Gamma+\xi)^2}$$

و مقدار تابع در نقطه $(p4,p5)$ برابر است با

$$\Pi1[\mathrm{p4,p5}]=\frac{1}{4\alpha\alpha1-(\Gamma+\xi)^2}(b^2\alpha+a^2\alpha1+(\alpha\alpha1-\Gamma\xi)(c3^2\alpha1+(c1+c2)((c1+c2)\alpha-c3(\Gamma+\xi)))+a(c3\alpha1(-\Gamma+\xi)+c1(-2\alpha\alpha1+\Gamma(\Gamma+\xi))+c2(-2\alpha\alpha1+\Gamma(\Gamma+\xi)))+b((c1+c2)\alpha(\Gamma-\xi)+a(\Gamma+\xi)+c3(-2\alpha\alpha1+\xi(\Gamma+\xi))))$$

شرط کافی برای اینکه نقطه $(p4,p5)$ نقطه ماکسیمم باشد این است که ماتریس هشین معین منفی باشد. یکی از را ه های اثبات معین منفی بودن ماتریس هشین این است که کلیه مقادیر ویژه ماتریس هشین منفی باشد. ماتریس هشین تابع به صورت رابطه زیر تعریف می شود.

$$\frac{\partial^2\Pi1}{\partial\{\mathrm{p4,p5}\}^2}=\begin{bmatrix}-2\alpha & \Gamma+\xi\\ \Gamma+\xi & -2\alpha1\end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه ماتریس هشین برابر است با

$$\begin{bmatrix}-\alpha-\alpha1-\sqrt{\alpha^2-2\alpha\alpha1+\alpha1^2+\Gamma^2+2\Gamma\xi+\xi^2}\\ -\alpha-\alpha1+\sqrt{\alpha^2-2\alpha\alpha1+\alpha1^2+\Gamma^2+2\Gamma\xi+\xi^2}\end{bmatrix}<\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

با حل دو نامعادله بالا ربطه زیر حاصل می شود.

$$\alpha1>\frac{\Gamma^2+2\Gamma\xi+\xi^2}{4\alpha}$$

پس اگر رابطه بالا برقرار باشد تابع هدف در نقطه $(p4,p5)$ دارای مقدار ماکسیمم می باشد.

۶-۳- اثبات قضیه ۳:

شرط لازم برای اینکه نقطه $(p4,p5)$، نقطه ماکسیمم تابع $\Pi2[p4,p5]$ باشد این است در اطراف نقطه پیوسته و مشتق پذیر باشد و همچنین $\nabla\Pi2[p4,p5]=0$ باشد. که این شرط برقرار است. اگر گرادیان تابع بالا را برابر صفر قرار دهیم از حل دستگاه دو معادله و دو مجهول مقدار $(p4,p5)$ برابر می شود با

$$p4 = -(-2\alpha 1(a + (c1 + c2)\alpha - c3\Gamma + (c1 + c2 + p1 + p2)\lambda) + (\Gamma + \xi)(-b - c3\alpha 1 + (c1 + c2)\xi))/(4\alpha 1(\alpha + \lambda) - (\Gamma + \xi)^2)$$

$$p5 = (2b(\alpha + \lambda) + \Gamma(a + (c1 + c2)\alpha + (c1 + c2 + p1 + p2)\lambda) + (a + (p1 + p2)\lambda - c1(\alpha + \lambda) - c2(\alpha + \lambda))\xi + c3(2\alpha 1(\alpha + \lambda) - \Gamma(\Gamma + \xi)))/(4\alpha 1(\alpha + \lambda) - (\Gamma + \xi)^2)$$

و میزان تابع هدف برابر است با

$$\Pi 2[p4, p5] = (-\alpha 1\Gamma(a + (c1 + c2)\alpha + (c1 + c2 + p1 + p2)\lambda) + (a\alpha 1 - (c1 + c2)(\alpha\alpha 1 - \Gamma^2) + (-c1 - c2 + p1 + p2)\alpha 1\lambda)\xi + (c1 + c2)\Gamma\xi^2 + 2c3\alpha 1(\alpha 1(\alpha + \lambda) - \Gamma\xi) + b(-2\alpha 1(\alpha + \lambda) + \xi(\Gamma + \xi)))/(-4\alpha 1(\alpha + \lambda) + (\Gamma + \xi)^2)$$

شرط کافی برای اینکه نقطه $(p4, p5)$ نقطه ماکسیمم باشد این است که ماتریس هشین معین منفی باشد. یکی از را ه های اثبات معین منفی بودن ماتریس هشین این است که کلیه مقادیر ویژه ماتریس هشین منفی باشد. ماتریس هشین تابع به صورت رابطه زیر تعریف می شود.

$$\frac{\partial^2 \Pi 2}{\partial\{p4, p5\}^2} = \begin{bmatrix} -2\alpha - 2\lambda & \Gamma + \xi \\ \Gamma + \xi & -2\alpha 1 \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه ماتریس هشین برابر است با

$$\begin{bmatrix} -\alpha - \alpha 1 - \lambda - \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha\alpha 1 + \alpha 1^2 + \Gamma^2 + 2\alpha\lambda - 2\alpha 1\lambda + \lambda^2 + 2\Gamma\xi + \xi^2} \\ -\alpha - \alpha 1 - \lambda + \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha\alpha 1 + \alpha 1^2 + \Gamma^2 + 2\alpha\lambda - 2\alpha 1\lambda + \lambda^2 + 2\Gamma\xi + \xi^2} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

با حل دو نامعادله بالا ربطه زیر حاصل می شود.

$$\alpha 1 > \frac{\Gamma^2 + 2\Gamma\xi + \xi^2}{4\alpha + 4\lambda}$$

پس اگر رابطه بالا برقرار باشد تابع هدف در نقطه $(p4, p5)$ دارای مقدار ماکسیمم می باشد.

۶-۴- مدل تعمیم یافته

اگر فرض کنیم، n محصول داشته باشیم که m تای آن مکمل(m<n) و n-m تای دیگر جایگزین باشند. مدلسازی مسئله برای سه حالت جدافروشی، فروش بسته‌ای با تخفیف و بدون تخفیف به صورت زیر صورت می‌پذیرد. در ابتدا پارامترها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

θ_{ji} به صورت زیر تعریف می شود.

$$\theta_{ji} = \begin{cases} -\alpha_{ji} & \text{if products i and j are complementary} \\ \beta_{ji} & \text{if products i and j are Substitutable} \end{cases}$$

در حالت جدافروشی تابع تقاضای هرمحصول و تابع هدف به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$d_1[p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_n] = a - \alpha_1\, p_1 + \sum_{j=1}^{n} \theta_{j1}\ p_j$$

پارامترها و متغیرهای مدل تعمیم یافته

تقاضای محصول iام در حالت جدافروشی	$d_i[p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_n]$
تقاضای بسته شاملm محصول مکمل	$d_{mc}[p_{mc}, p_{m+1}, \dots, p_n]$
تقاضای بسته شاملm محصول مکمل با تخفیف	$d_{mcd}[p_{mcd}, p_{m+1}, \dots, p_n]$
تقاضای فروش محصول جایگزینi ام هنگام فروش بسته‌ای	$d_{mci}[p_{mc}, p_{m+1}, \dots, p_n]$
تقاضای فروش محصول جایگزینi ام هنگام فروش بسته‌ای با تخفیف	$d_{mcdi}[p_{mcd}, p_{m+1}, \dots, p_n]$
قیمت فروش محصول iام	p_i
قیمت فروش بسته شاملm محصول مکمل	p_{mc}
قیمت فروش بسته شاملm محصول مکمل هنگام تخفیف	p_{mcd}
تابع هدف مسئله در حالت فروش جداگانه	$Be[p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_n]$
تابع هدف مسئله در حالت فروش بسته ای	$\Pi 1[p_{mc}, p_{m+1}, \dots, p_n]$
تابع هدف مسئله در حالت فروش بسته ای با تخفیف	$\Pi 2[p_{mcd}, p_{m+1}, \dots, p_n]$
هزینه خرید محصول iام	c_i
تقاضای هر محصول در حالتی که قیمت محصولات صفر باشد.	a
ضریب حساسیت تقاضای محصولi به قیمتش	α_i
ضریب حساسیت تقاضای محصولi به قیمت محصول j زمانیکه این دو محصول مکمل‌اند	α_{ji}
ضریب حساسیت تقاضای محصولi به قیمت محصول j زمانیکه این دو محصول جایگزین-اند	β_{ji}
ضریب حساسیت تقاضای محصولi به قیمت محصول j	Θ_{ji}
ضریب حساسیت تقاضای تقاضای بسته به قیمت بسته	Υ
ضریب حساسیت تقاضای محصول جایگزین iام به قیمت بسته	Υ_i
ضریب حساسیت تقاضای بسته محصولات به میزان تخفیف	λ

$$d_i[p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_n] = a - \alpha_i\, p_i + \sum_{j=1}^{i-1} \theta_{ji}\ p_j + \sum_{j=i+1}^{n} \theta_{ji}\ p_j$$

$$Be[p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_n] = \sum_{i=1}^{n} (p_i - c_i) d_i[p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_n]$$

در حالت فروش بسته‌ای، تقاضای بسته و تقاضای هر محصول جایگزین و تابع هدف به صورت زیر مدل می‌شود.

$$d_{mc}[p_{mc}, p_{m+1}, \dots, p_n] = a - \Upsilon\, p_{mc} + \sum_{j=m+1}^{n} \theta_{j\,mc}\ p_j$$

$$d_{mci}[p_{mc}, p_{m+1}, \dots, p_n] = a + \Upsilon_i\, p_{mc} + \sum_{j=m+1}^{n} \theta_{ji}\ p_j$$

$$\Pi1[\mathrm{p_{mc}}, \mathrm{p_{m+1}}, \dots, \mathrm{p_n}] = (\mathrm{p_{mc}} - \sum_{i=1}^{m} c_i)\mathrm{d_{mc}}[\mathrm{p_{mc}}, \mathrm{p_{m+1}}, \dots, \mathrm{p_n}] + \sum_{i=m+1}^{n} (\mathrm{p_i} - \mathrm{c_i})\mathrm{d_i}[\mathrm{p_{mc}}, \mathrm{p_{m+1}}, \dots, \mathrm{p_n}]$$

در حالت فروش بسته‌ای همراه با تخفیف، تقاضای بسته و تقاضای هر محصول جایگزین و تابع هدف به صورت زیر مدل می‌شود.

$$\mathrm{d_{mcd}}[\mathrm{p_{mc}}, \mathrm{p_{m+1}}, \dots, \mathrm{p_n}] = a - \Upsilon\,\mathrm{p_{mc}} + (\sum_{i=1}^{m} p_i - \mathrm{p_{mc}})\lambda + \sum_{j=m+1}^{n} \theta_{j\,mc}\ p_j$$

$$\mathrm{d_{mcdi}}[\mathrm{p_{mc}}, \mathrm{p_{m+1}}, \dots, \mathrm{p_n}] = a + \Upsilon_i\,\mathrm{p_{mc}} + \sum_{j=m+1}^{n} \theta_{ji}\ p_j$$

$$\Pi2[\mathrm{p_{mc}}, \mathrm{p_{m+1}}, \dots, \mathrm{p_n}] = (\mathrm{p_{mc}} - \sum_{i=1}^{m} c_i)\mathrm{d_{mc}}[\mathrm{p_{mc}}, \mathrm{p_{m+1}}, \dots, \mathrm{p_n}] + \sum_{i=m+1}^{n} (\mathrm{p_i} - \mathrm{c_i})\mathrm{d_i}[\mathrm{p_{mc}}, \mathrm{p_{m+1}}, \dots, \mathrm{p_n}]$$